

EAN Escuela de Administración de Negocios

Análisis de Markov

La matriz de transición, probabilidades de los estados de transición.
Estados de una cadena de Markov
Probabilidades del estado estable

Análisis de Markov

El análisis de Markov es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencias futuras mediante el análisis de las probabilidades conocidas en el presente. La técnica tiene diversas aplicaciones en los negocios, incluyendo análisis de la participación en el mercado, predicción de deudas incobrables, predicción de la matrícula universitaria, determinación de si una máquina se descompondrá en el futuro.

Matriz de Probabilidad de Transición

El análisis de Markov hace la suposición de que el sistema comienza en un estado o una condición inicial.

La matriz de probabilidad de transición muestra la probabilidad de un cambio.

Esta matriz de probabilidades de transición muestra la probabilidad de que el sistema cambie de un periodo al siguiente. Este es el proceso de Markov que nos permite predecir los estados o las condiciones futuras.

Matriz de n-pasos

Una matriz de transición para una cadena de Markov de n estado es una matriz de n X n con todos los registros no negativos y con la propiedad adicional de que la suma de los registros de cada columna (o fila) es 1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz **P** define una cadena de Markov. Tiene la propiedad de que todas sus probabilidades de transición ***pij*** son estacionarias e independientes a lo largo del tiempo

Ejercicio 1.

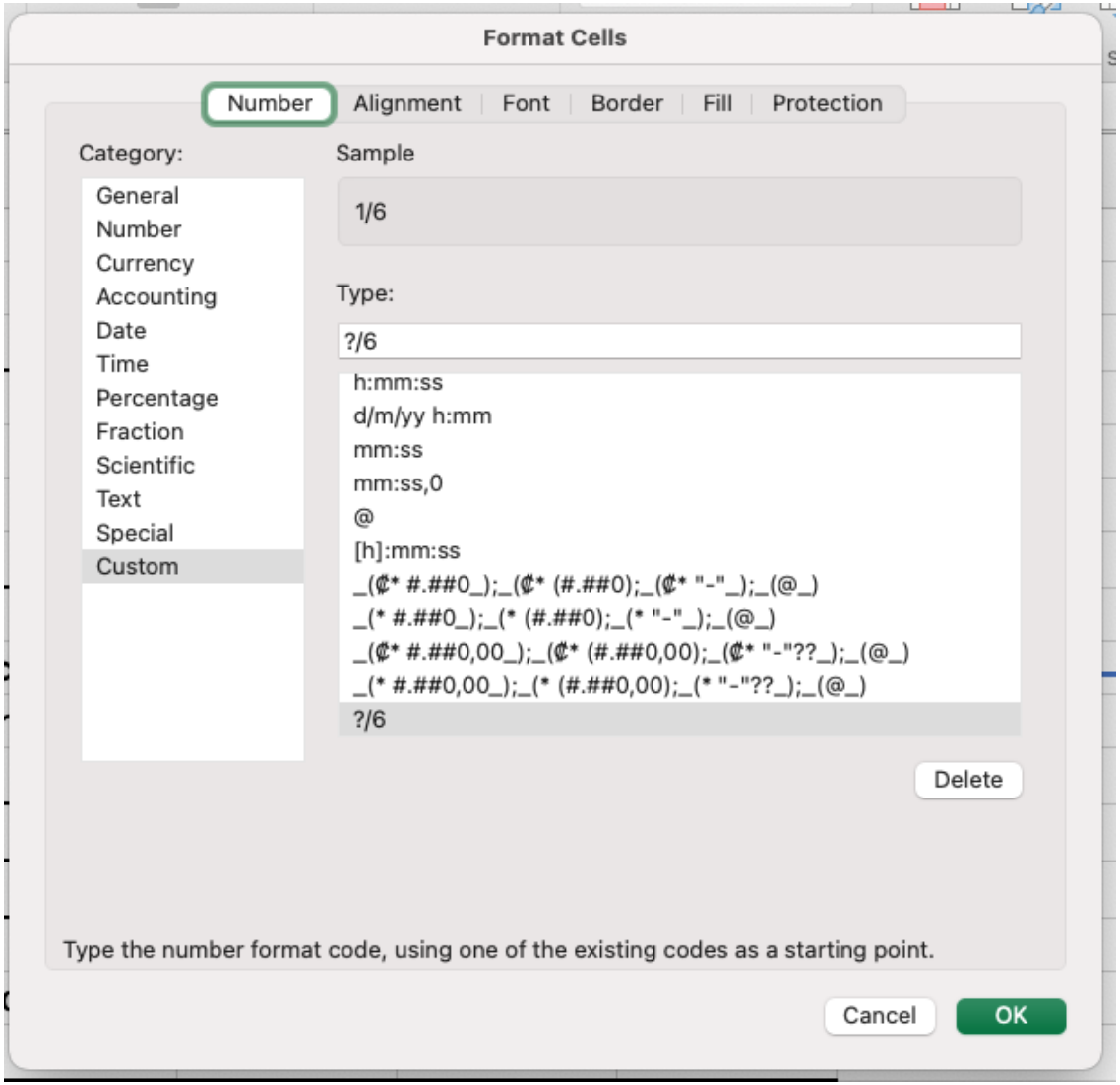
Baje de www.ucrenop.com el archivo de excel con el nombre: Sesión 12 ejercicios de análisis de markov 1.

Un juego de lanzamiento de dados utiliza una cuadrícula de cuatro casillas. Las casillas están designadas en sentido horario como A, B, C y D con retribuciones monetarias de $4, -$2, -$6 y $9 respectivamente. Comenzando en la casilla A, lanzamos un dado para determinar la siguiente casilla a la que nos moveremos en el sentido de las manecillas del reloj. El juego se repite utilizando la última casilla como punto inicial.

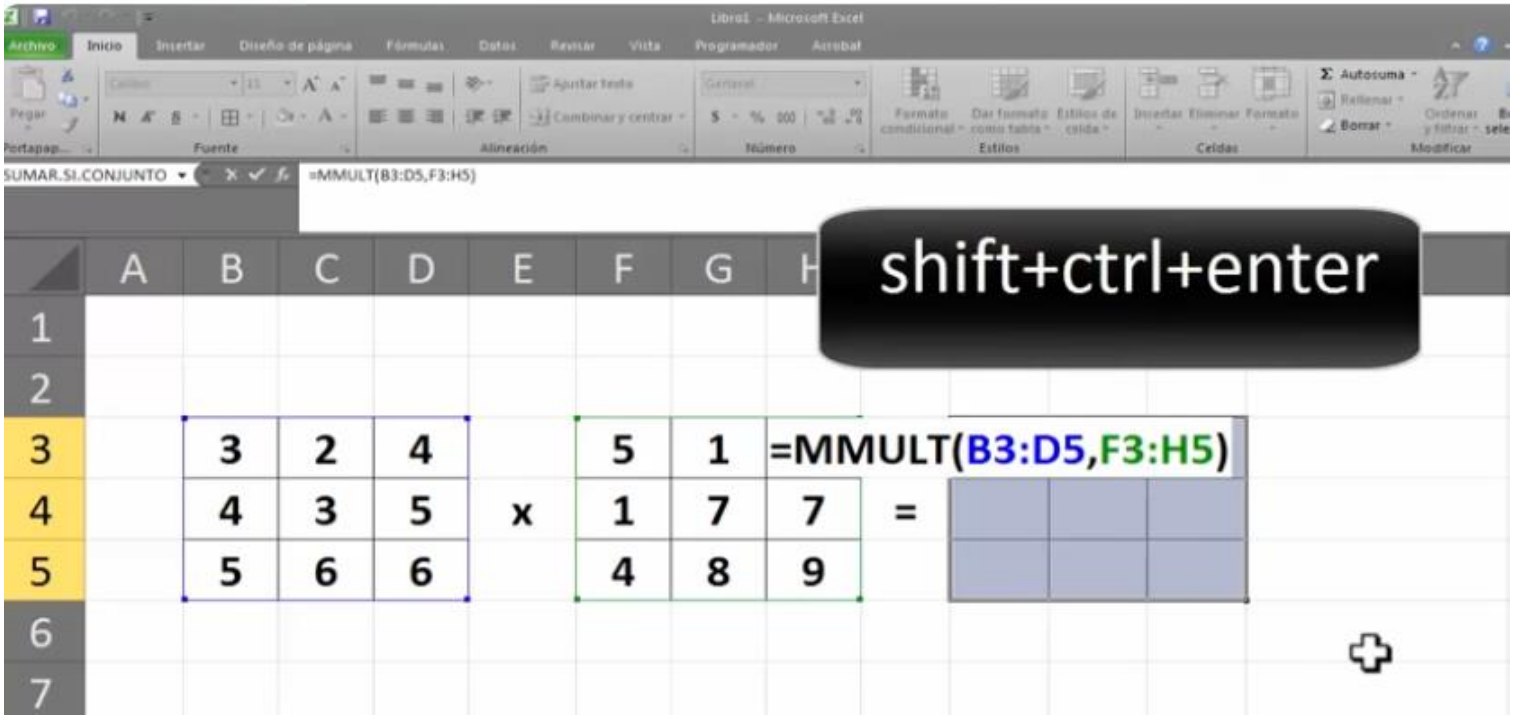
a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

b) Determine la ganancia o pérdida esperadas después de lanzar el dado 2 veces (con excel) y luego 5 veces.

Tomado del libro Investigación de Operaciones Taha 9 edición.

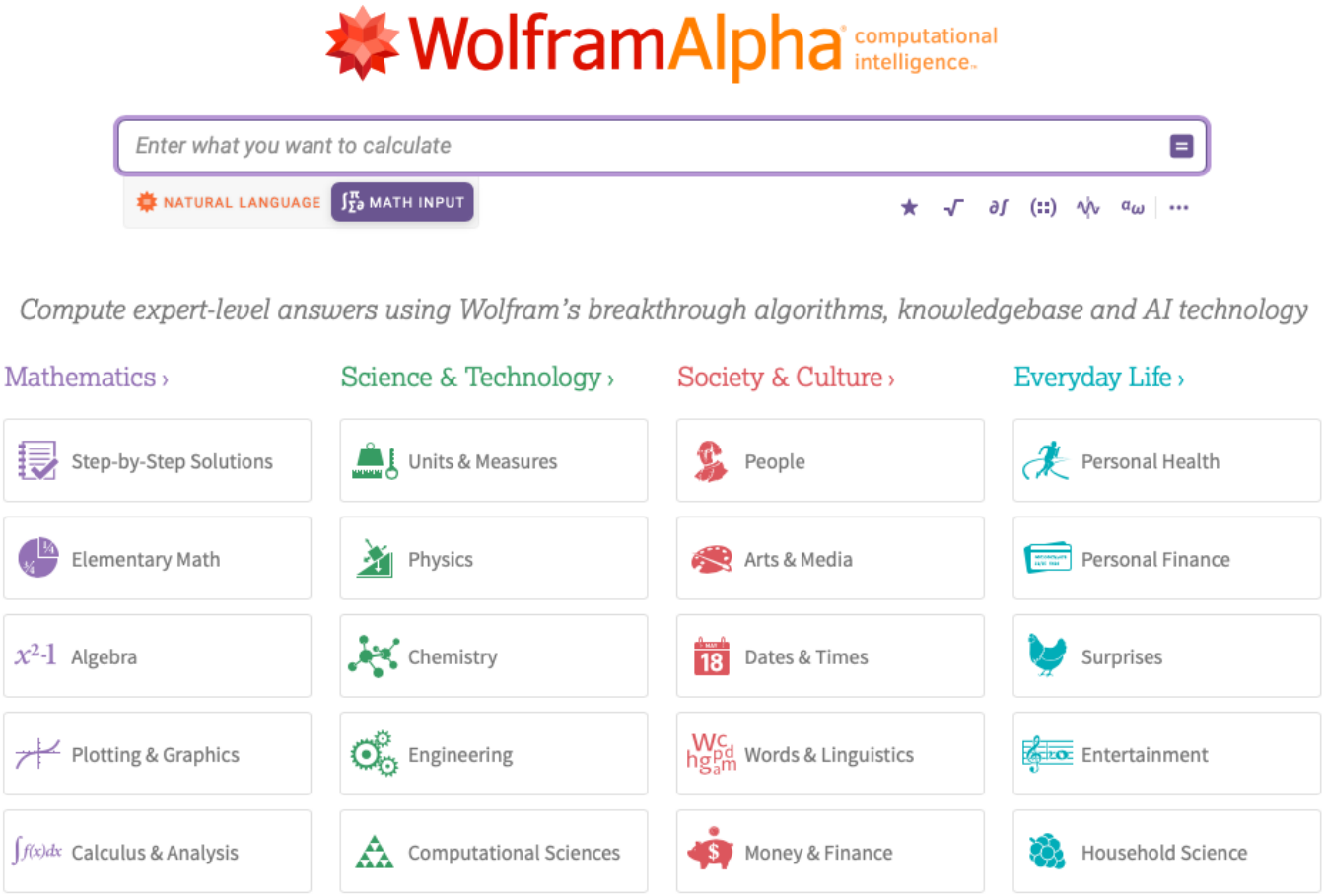


Vamos a trabajar las probabilidades del dado en fracciones



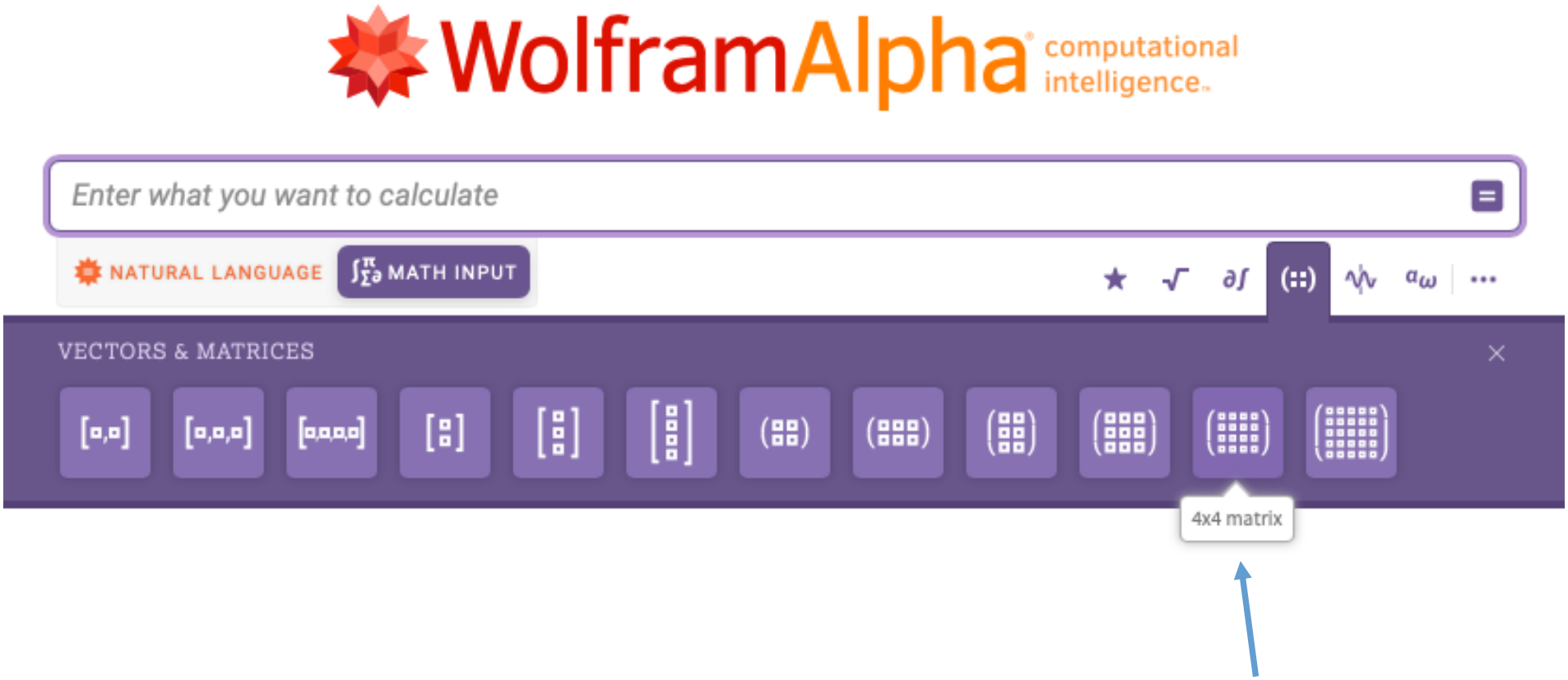
Para multiplicar matrices en Excel se debe usar la función MMULT. A diferencia de una función común y corriente, esta función después de escribir la formula se debe pulsar la combinación de teclas CONTROL+SHIFT+ENTER

Para las operaciones con matrices más complejas podemos utilizar herramientas más potentes.



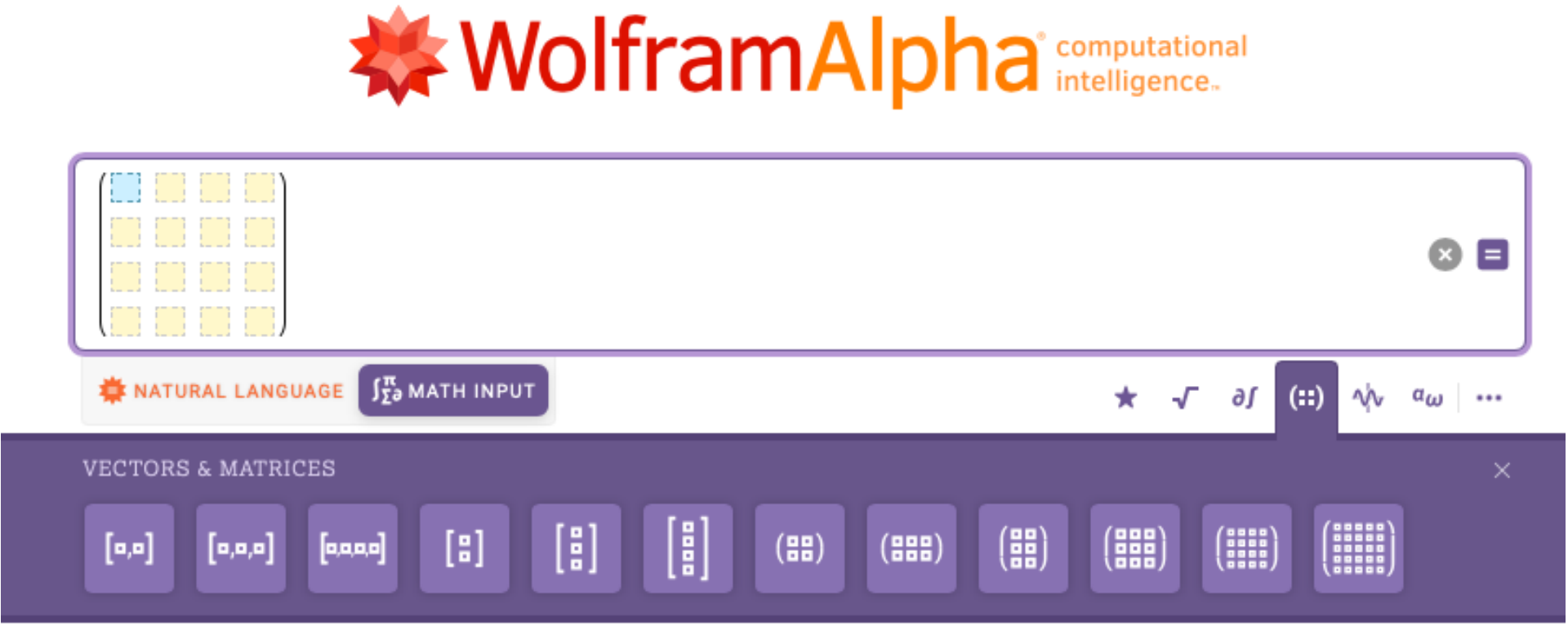
Para averiguar el resultado de lanzar el dado 5 veces es necesario elevar la matriz a la 5.
Seleccionamos la opción para trabajar con matrices



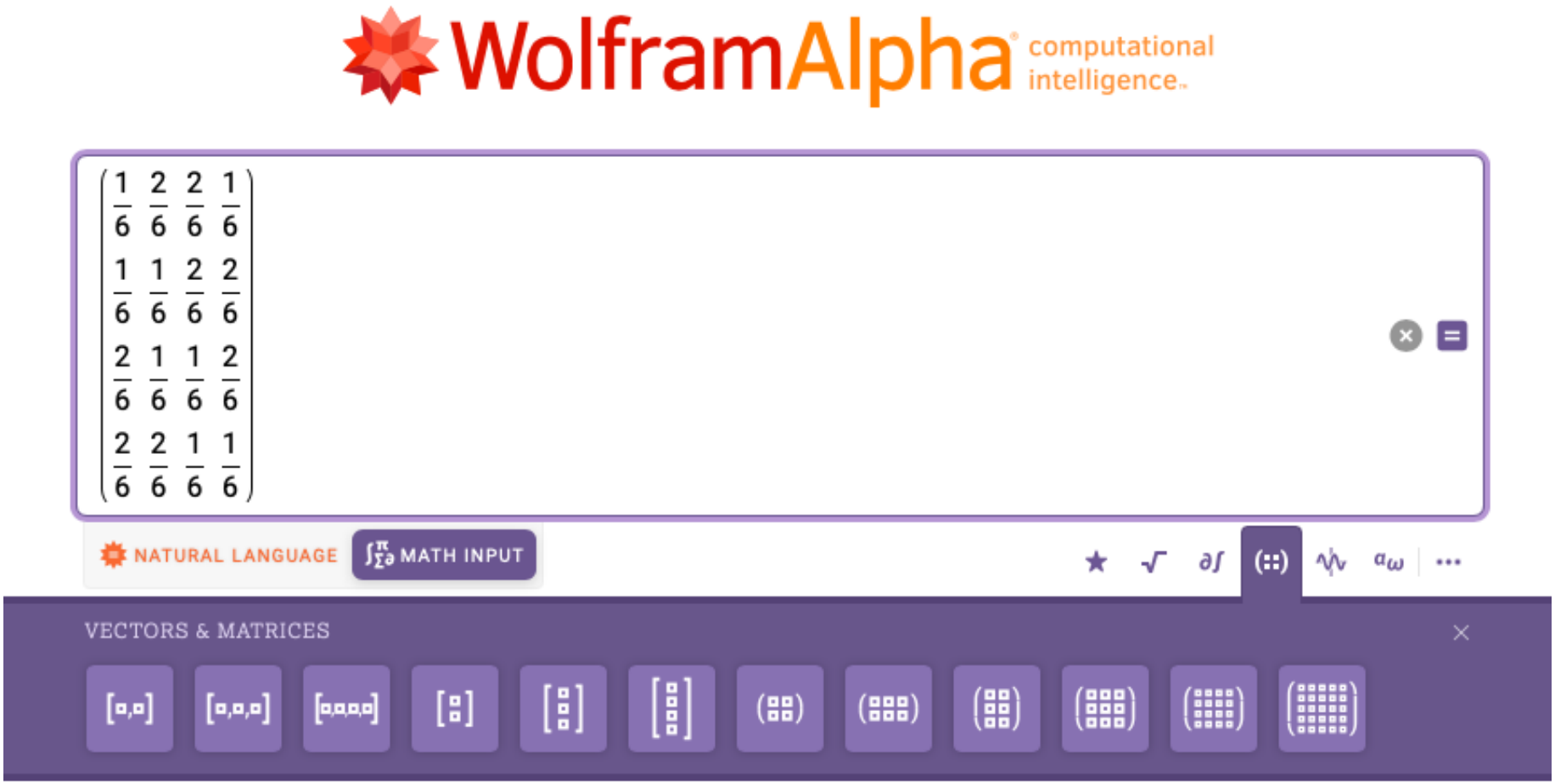


Seleccionamos la opción para una matriz 4 x 4

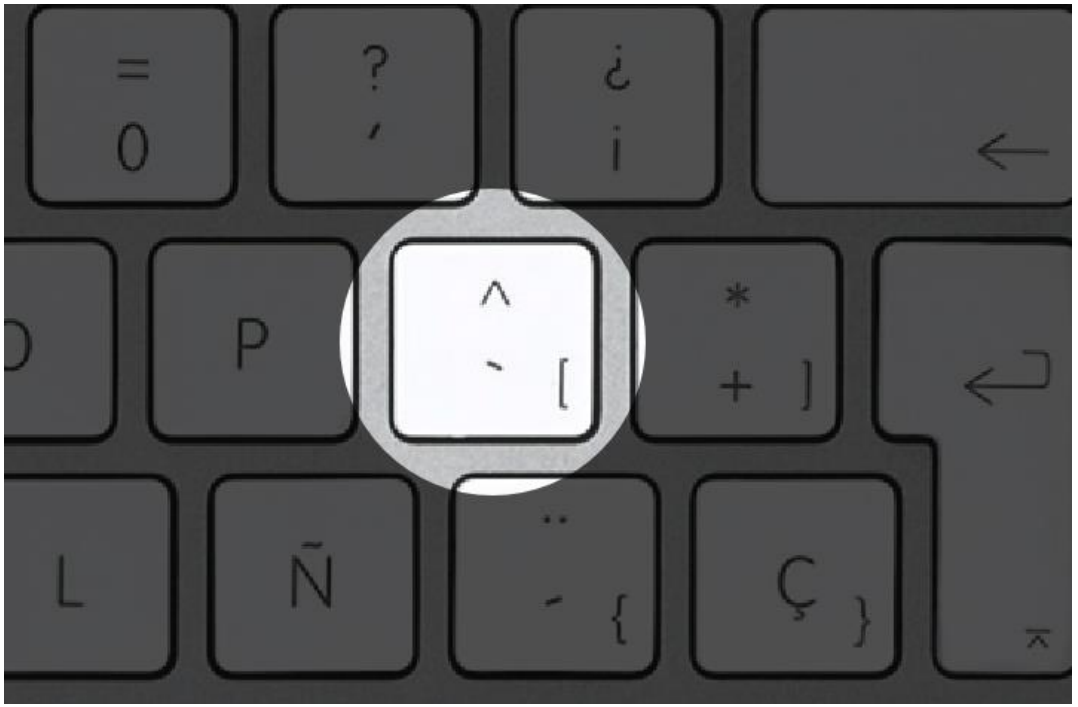
Se nos abre una pizarra sobre la que podemos digitar las operaciones que deseamos realizar.
Procedemos a llenar la caja de dialogo que nos da WolframAlpha.



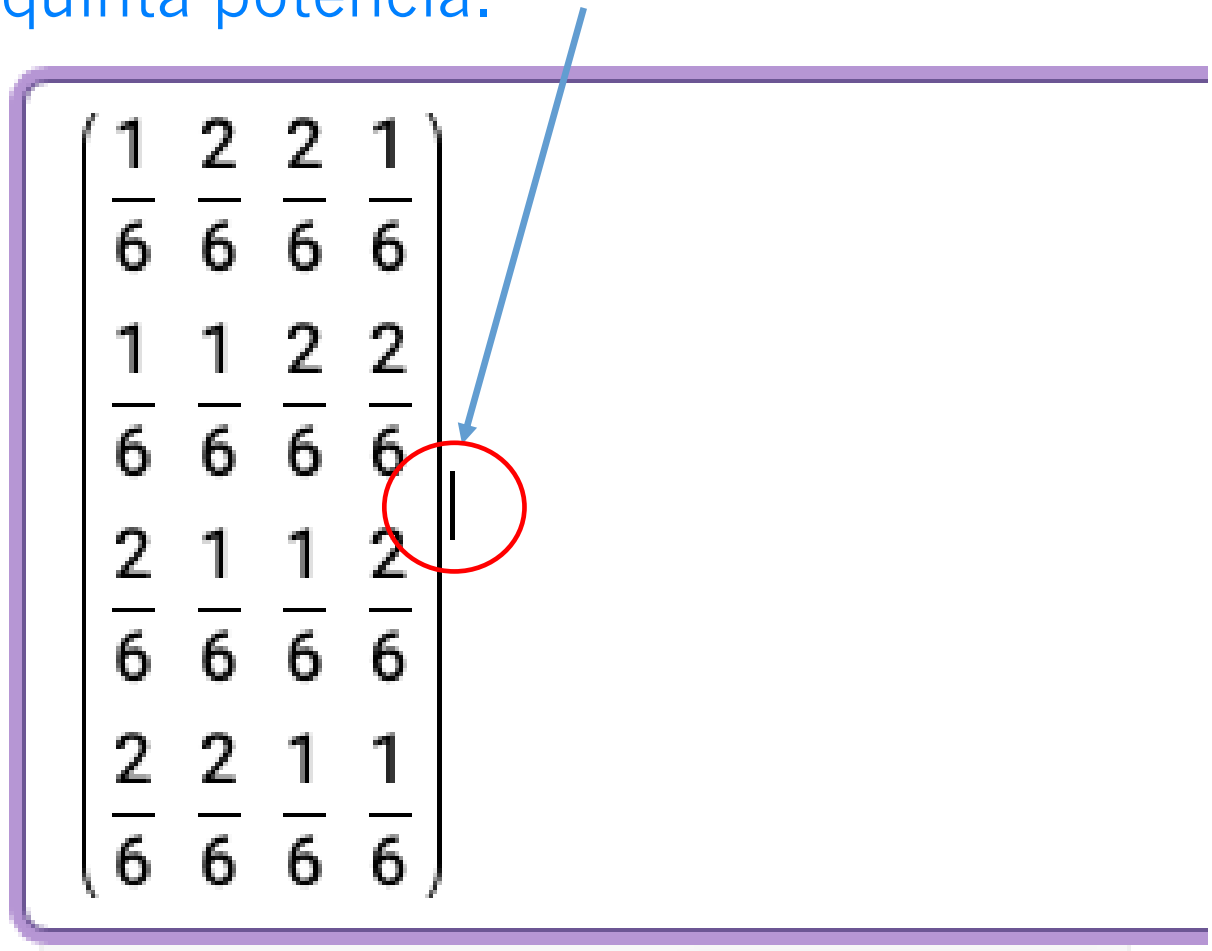
Una vez que tenemos digitada la matriz, la vamos a elevar a la quinta potencia



Para elevar la matriz utilizamos el acento circunflejo que tenemos en nuestro teclado



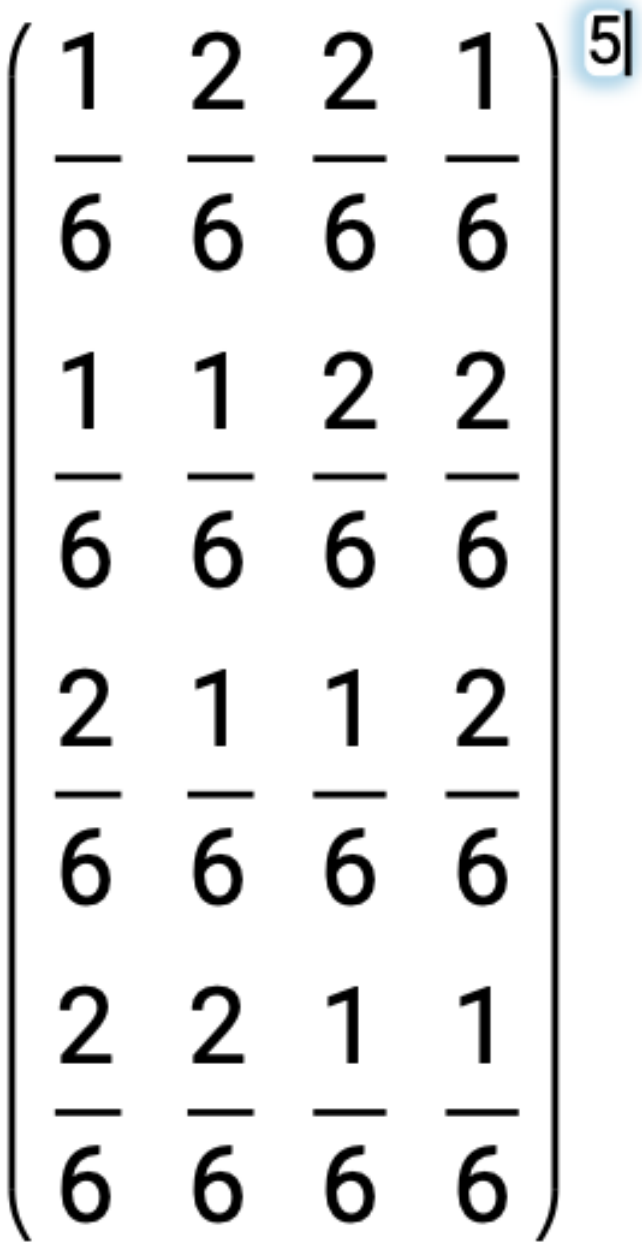
Con tu mouse te colocas en la pizarra y en ella podrás realizar las operaciones que desees, en este caso, vamos a utilizar el acento circunflejo (^) para elevar la matriz a la quinta potencia.



Posicionada o posicionado en la pizarra digitas el acento circunflejo, automáticamente wolfram te coloca la casilla para que escribas el número al cual deseas elevar la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Para averiguar lo que obtendrías si lanzas el dado 5 veces, elevas la matriz a la 5



Apretamos el igual para obtener el resultado

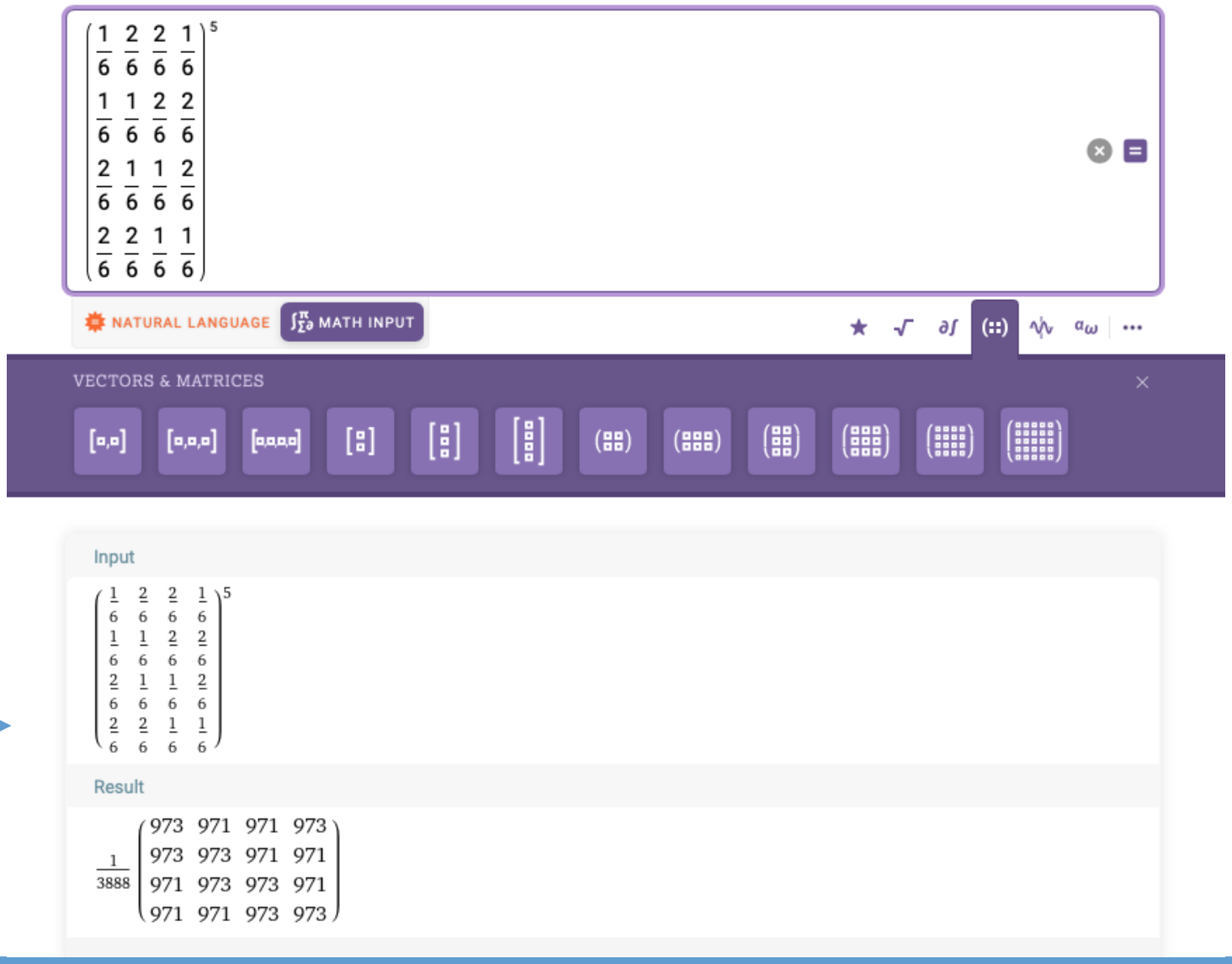
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{5}$$



Tu pizarra →

Selección de operaciones →

Pizarra de respuestas →



Input:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^5$$

Copias esta respuesta en tu excel cuando resuelves los ejercicios de Markov de tu examen.

Si tu posición inicial es C y lanzas el dado 5 veces para caer en B cuál es la probabilidad de que eso ocurra:

Result:

$$\frac{1}{3888}\begin{pmatrix} 973 & 971 & 971 & 973 \\ 973 & 973 & 971 & 971 \\ 971 & 973 & 973 & 971 \\ 971 & 971 & 973 & 973 \end{pmatrix}$$

Estados y probabilidades de los estados

Los estados se utilizan para identificar todas las condiciones posibles de un proceso o sistema. Después de identificar los estados, el siguiente paso consiste en determinar la probabilidad de que el sistema esté en dicho estado.

La información se coloca en un vector de probabilidades de estado:

$\pi(i)$ = **vector de probabilidades de estado para el periodo** i

$= (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$

Donde:

n = **número de estados**

$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ = **probabilidad de estar en el estado 1, estado 2, …, estado** n

Si sabemos con certidumbre en qué estado se encuentra:

$\pi(1) = (1, 0)$

Ejercicio 1.

Ahora debemos calcular una probabilidad absoluta para contestar la parte b. Esta probabilidad está dada por:

$$a^n = a^0 \times p^n$$

En donde a^0 es la situación actual y p^n es la matriz de transición a n pasos.

Probabilidades de transición absolutas y de n pasos.

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^2$$

$$\mathbf{a}^{(3)} = \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^2\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^3$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

La matriz P^n se conoce como la matriz de transición de n pasos. A partir de estos cálculos podemos ver que:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-m}\mathbf{P}^m, 0 < m < n$$

Ejercicio 2

Tomado del libro Investigación de Operaciones Taha 9 edición.

Cada año, durante la temporada de siembra de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado de la prueba, la productividad en la nueva temporada puede ser uno de tres estados: (1) buena, (2) regular y (3) mala. A lo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual y que la situación se describe mediante la siguiente cadena de Markov:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \textit{Estado del sistema el siguiente año} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$$\textit{Estado del sistema este año}$$

Ejercicio 2

Ahora suponga que se decide mejorar la productividad de la tierra tratando la misma con un fertilizante orgánico y la matriz de transición que se obtiene es la siguiente:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 2

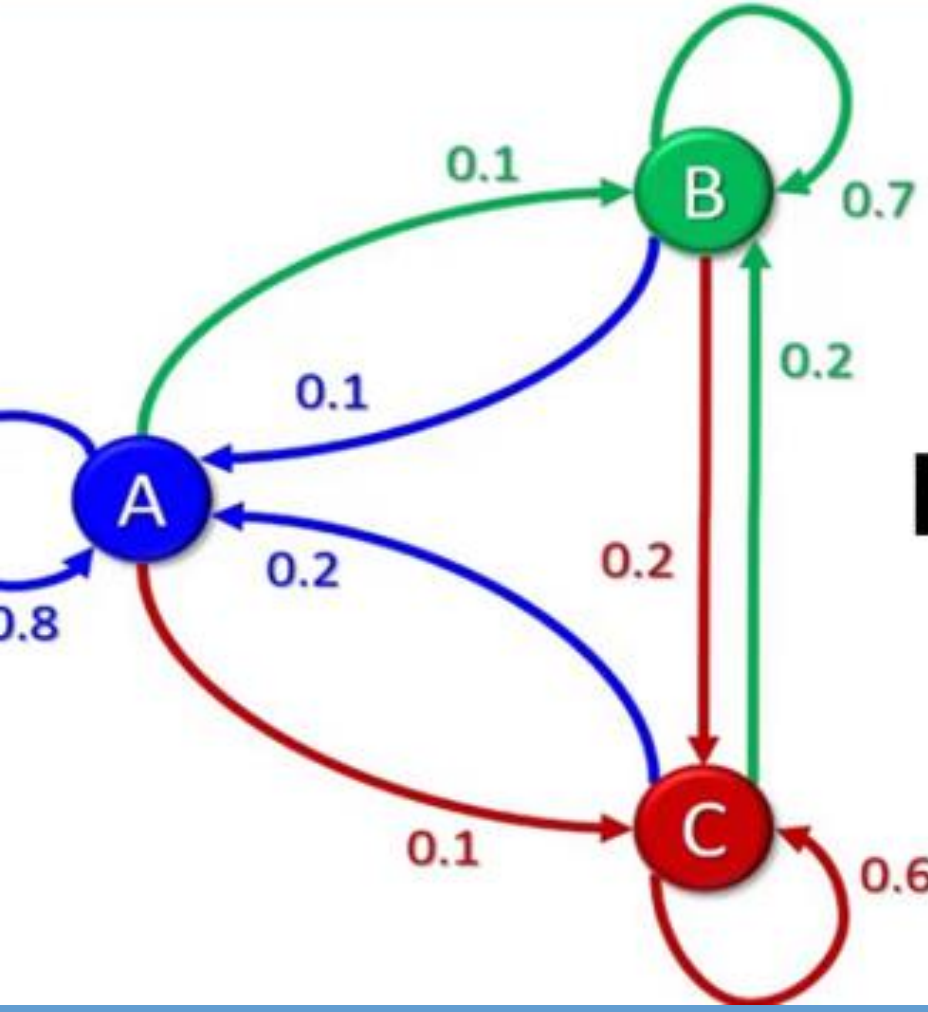
La condición de la tierra inicial es buena $a^{(0)} = (1,0,0)$. Determine las probabilidades absolutas de los tres estados del sistema depués de 1, 8 y 16 temporadas de siembra.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} \end{array}$$

Debemos elevar a la 8 y a la 16 la matriz inicial y multiplicarlo por la posición actual.

$$\mathbf{a}^{(1)} = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} = (.30 \quad .60 \quad .1)$$

Para el año 1



$$P = DE$$

A

	A	B	C
A	0.8	0.1	0.1
B	0.1	0.7	0.2
C	0.2	0.2	0.6

Estados de una Cadena de Markov

Estados Absorventes

En los ejemplos estudiados hasta ahora, suponemos que es posible que el proceso o sistema vaya de un estado a cualquier otro, entre cualesquiera dos periodos. Sin embargo, en algunos casos no se puede ir a otro estado en el futuro. En otras palabras, cuando se encuentra en un estado dado, este lo “absorbe”, y permanecerá en ese estado. Cualquier estado que tiene tal propiedad se llama estado absorbente.

Estados Transitorios

Por el contrario, en estos estados los procesos son de paso, pero pueden ser visitados un número finito de veces.

Ejercicio 3. Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov

Recuerde:

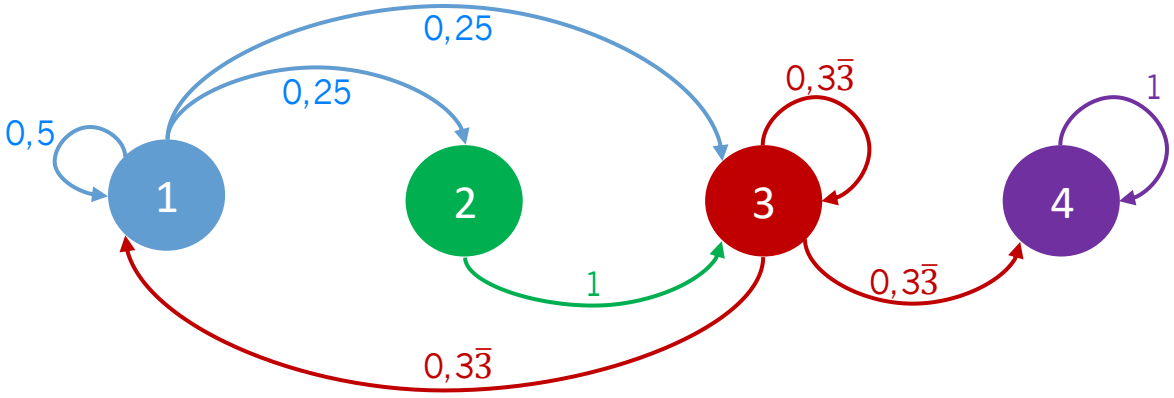
Siguiente

Actual

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los estados 1, 2 y 3 son estados transitorios mientras que el estado 4 es absorvente



Estados Recurrentes

Son aquellos que regresan a su estado de origen.

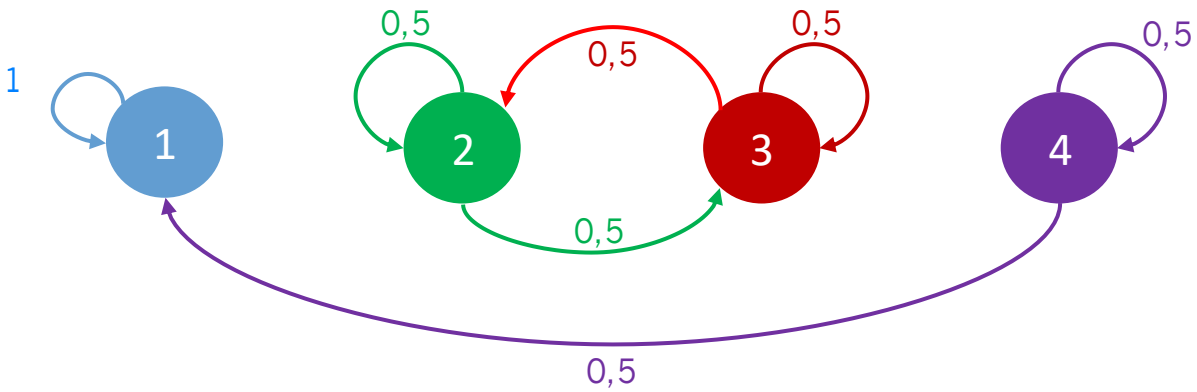
Los estados absorventes por su naturaleza son todos recurrentes, una vez ahí, entran en un ciclo.

Ejercicio 3. Dadas las siguientes matrices de transición de un solo paso de una cadena de Markov, determine las clases de las cadenas de Markov y si son recurrentes.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

El estado 1 es absorvente, los estados 2 y 3 son recurrentes y el estado 4 es transitorio.



Probabilidad de estado estable

Las condiciones de estado estable existen si las probabilidades de estado no cambian después de un número grande de periodos.

Es decir, no cambian, aunque se agregue un paso adicional.

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

Ejercicio 2

Para determinar la distribución de probabilidad de estado estable del problema del jardinero tenenmos:

$$(\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) \begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

$$(\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)\begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

Convertimos a variables de decisión

π_1 = **X**

π_2 = **Y**

π_3 = **Z**

$$(X \ Y \ Z)\begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

$$(X \;\; Y \;\; Z)\begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

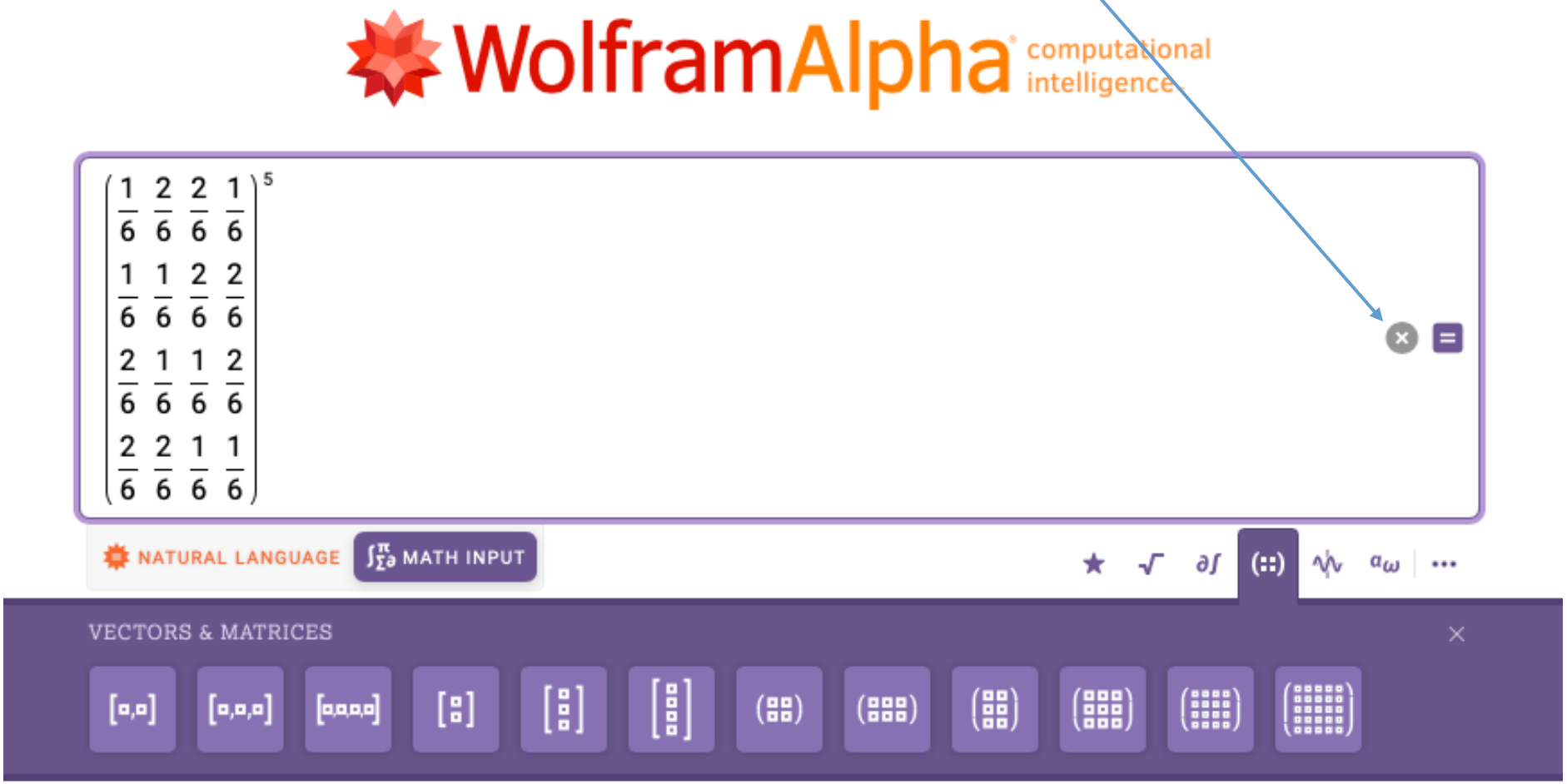
Procedemos a multiplicar las matrices y obtenemos:

X = 0,30X + 0,10Y + 0,05Z
Y = 0,60X + 0,60Y + 0,40Z
Z = 0,10X + 0,30Y + 0,55 Z
X + Y + Z = 1

Para resolver el sistema de ecuaciones agregamos esta equación, ya que sabemos que las probabilidades deben sumar 1

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos las probabilidades del estado estable del problema del jardinero

Con este botón borramos la pizarra



DE LOS CREADORES DE *WOLFRAM LANGUAGE* Y *MATHEMATICA*

WolframAlpha

sistema de ecuaciones

Lenguaje Natural | Entrada Matemática

Calcule respuestas verificadas y de nivel experto usando los innovadores algoritmos, y la base de conocimientos de Wolfram

Matemáticas ›

- Soluciones paso a paso
- Matemática elemental
- Álgebra
- Representaciones gráficas
- Cálculo y análisis
- Geometría

Ciencia y tecnología ›

- Units & Measures
- Physics
- Chemistry
- Engineering
- Computational Sciences
- Earth Sciences

Sociedad y cultura ›

- People
- Arts & Media
- Dates & Times
- Words & Linguistics
- Money & Finance
- Food & Nutrition

Vida cotidiana ›

- Personal Health
- Personal Finance
- Surprises
- Entertainment
- Household Science
- Household Math

DE LOS CREADORES DE **WOLFRAM LANGUAGE** Y *MATHEMATICA*

WolframAlpha

sistema de ecuaciones

Lenguaje Natural | Entrada Matemática

Se asume que "sistema de ecuaciones" se refiere a un cálculo | Alternativa: un tema general

Entrada computacional:

Se asume sistema de tres ecuaciones | Alternativas: sistema de cuatro ecuaciones o sistema de dos ecuaciones

» ecuación 1: x - 3 y + z = 2

» ecuación 2: 3 x - 4 y + z = 0

» ecuación 3: 2 y - z = 1

Calcular

Interpretación de la entrada:

	$x-3y+z=2$
resuelve	$3x-4y+z=0$
	$2y-z=1$

Resultado:

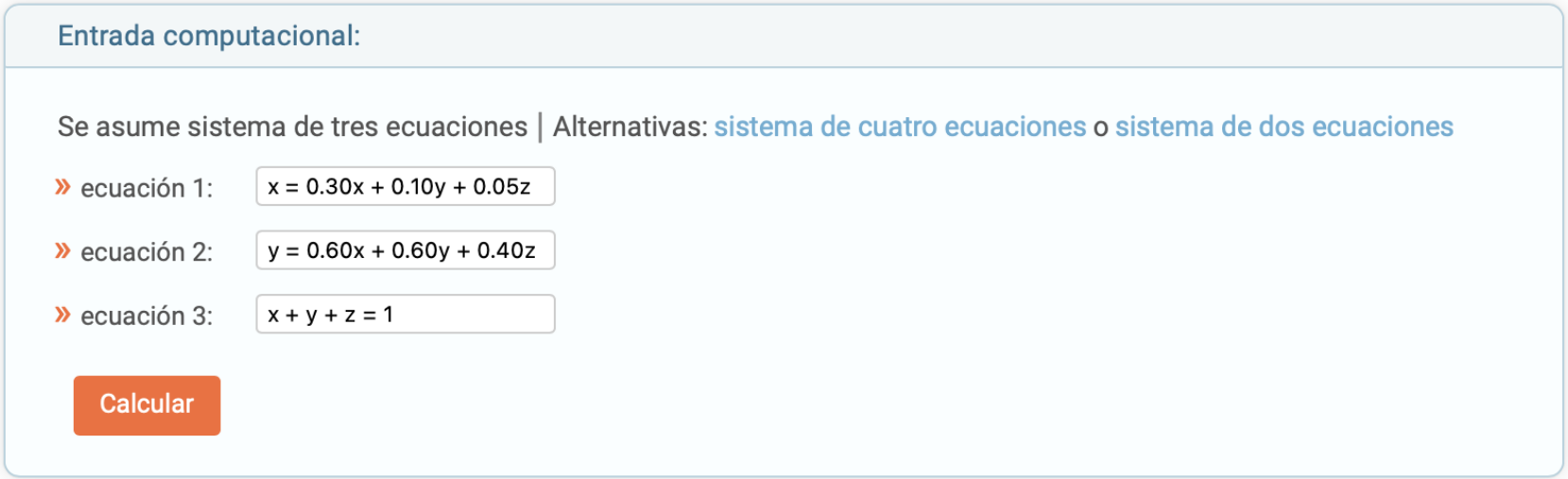
Solución paso a paso

$x=-5$ y $y=-8$ y $z=-17$

Potenciado por **WOLFRAM LANGUAGE**

$$X = 0{,}30X + 0{,}10Y + 0{,}05Z$$
$$Y = 0{,}60X + 0{,}60Y + 0{,}40Z$$
$$Z = 0{,}10X + 0{,}30Y + 0{,}55\,Z$$
$$X + Y + Z = 1$$

Para resolver este sistema de ecuaciones sólo ocupamos dos de las tres ecuaciones (puede ser cualquiera de esas 3) más la ecuación que está igualada a 1.



Interpretación de la entrada:

resuelve	$x = 0{,}3\,x + 0{,}1\,y + 0{,}05\,z$
	$y = 0{,}6\,x + 0{,}6\,y + 0{,}4\,z$
	$x + y + z = 1$

Resultado: Forma aproximada | Solución paso a paso

$$x = \frac{6}{59} \text{ y } y = \frac{31}{59} \text{ y } z = \frac{22}{59}$$

Descargar página

Potenciado por **WOLFRAM LANGUAGE**

Interpretación de la entrada:

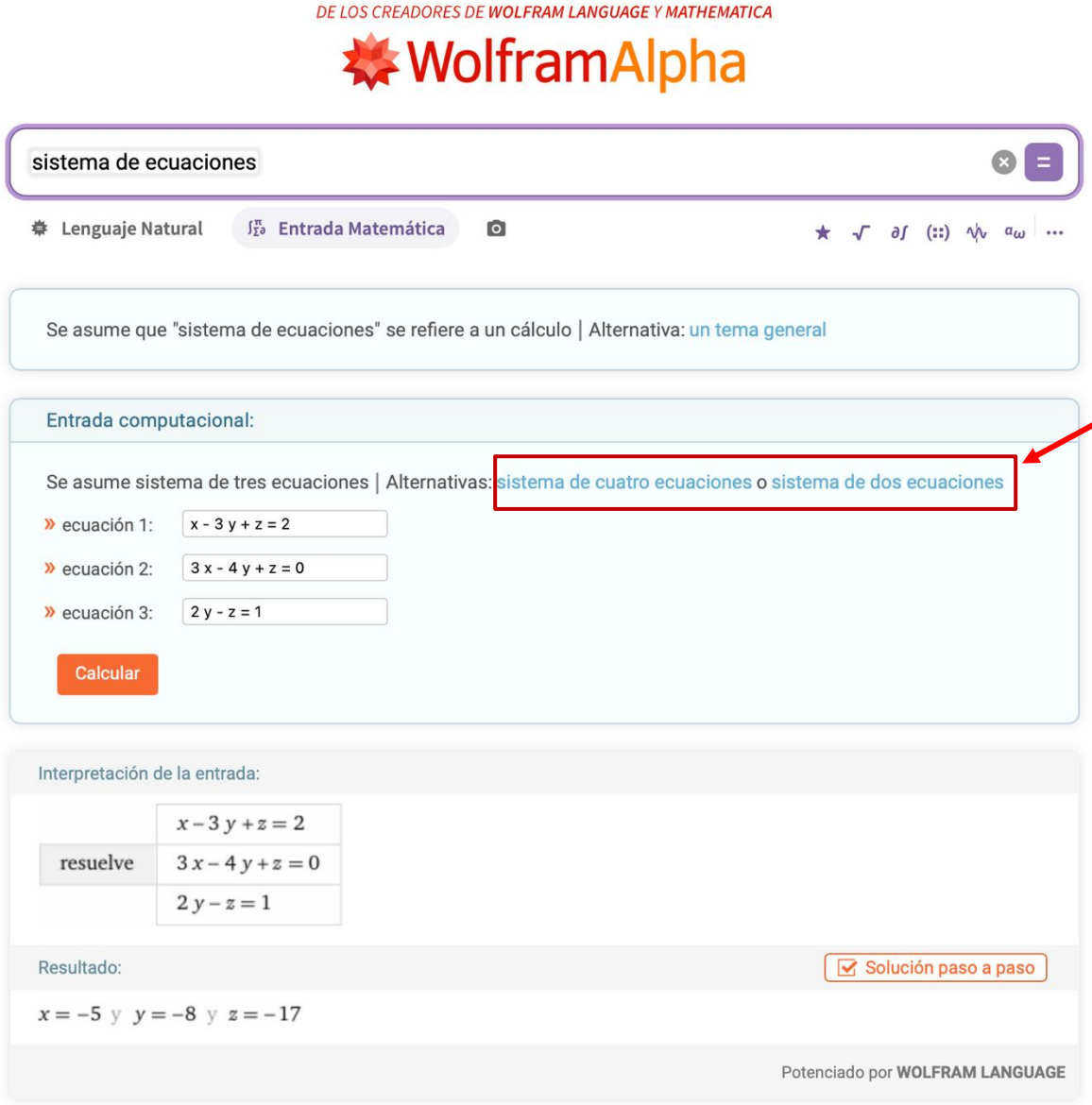
resuelve	$x = 0{,}3\,x + 0{,}1\,y + 0{,}05\,z$
	$y = 0{,}6\,x + 0{,}6\,y + 0{,}4\,z$
	$x + y + z = 1$

Resultado: Más dígitos | Forma exacta | Solución paso a paso

$$x \approx 0{,}10169 \text{ y } y \approx 0{,}52542 \text{ y } z \approx 0{,}37288$$

Descargar página

Potenciado por **WOLFRAM LANGUAGE**


DE LOS CREADORES DE WOLFRAM LANGUAGE Y MATHEMATICA
WolframAlpha
sistema de ecuaciones
Lenguaje Natural
Entrada Matemática
Se asume que "sistema de ecuaciones" se refiere a un cálculo | Alternativa: un tema general
Entrada computacional:
Se asume sistema de tres ecuaciones | Alternativas: sistema de cuatro ecuaciones o sistema de dos ecuaciones
ecuación 1: x - 3 y + z = 2
ecuación 2: 3 x - 4 y + z = 0
ecuación 3: 2 y - z = 1
Calcular
Interpretación de la entrada:
resuelve
x − 3 y + z = 2
3 x − 4 y + z = 0
2 y − z = 1
Resultado:
Solución paso a paso
x = −5 y y = −8 y z = −17
Potenciado por WOLFRAM LANGUAGE
OJO

Por ello vamos a ver cómo se resuelve digitando en la pizarra las fórmulas

Supongamos que queremos resolver la siguiente ecuación:

$$3X+1=5$$

Escribimos en la pizarra la ecuación:



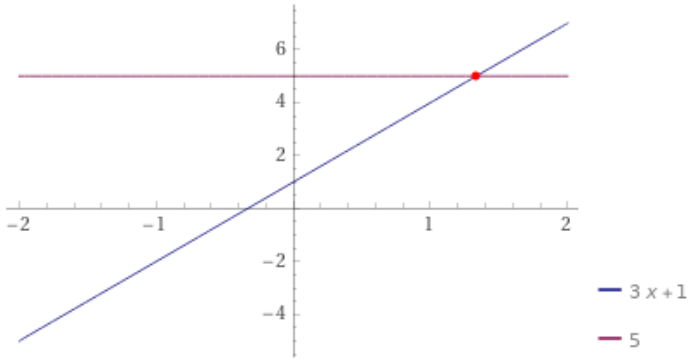
3x+1=5

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT

Input

$3x + 1 = 5$

Plot



Alternate forms

$3x = 4$

$3x - 4 = 0$

Number line



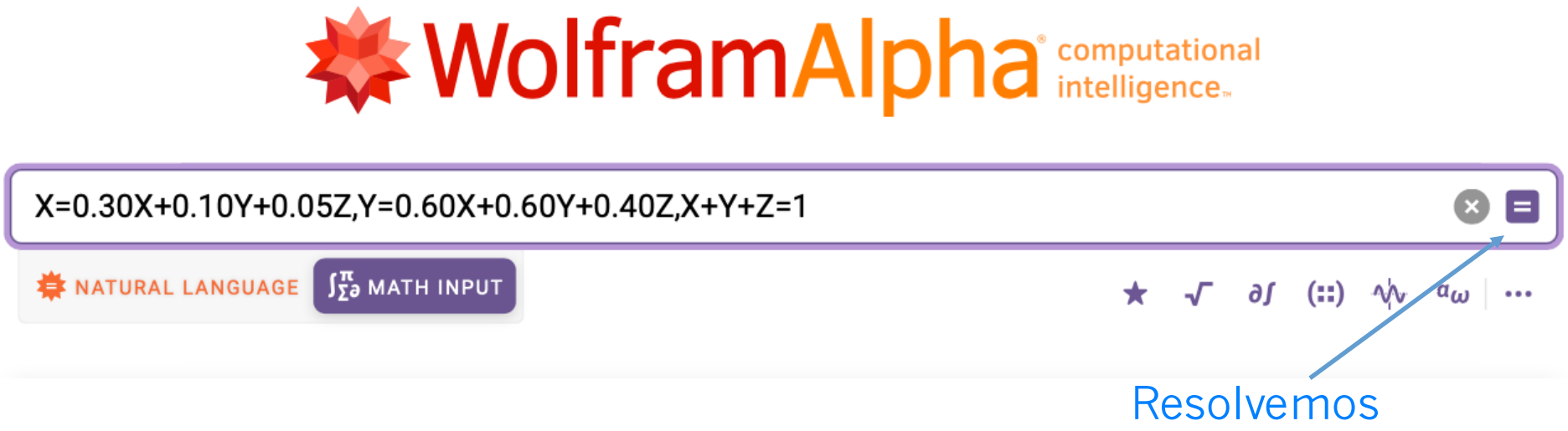
Solution

Approximate form | Step-by-step solution

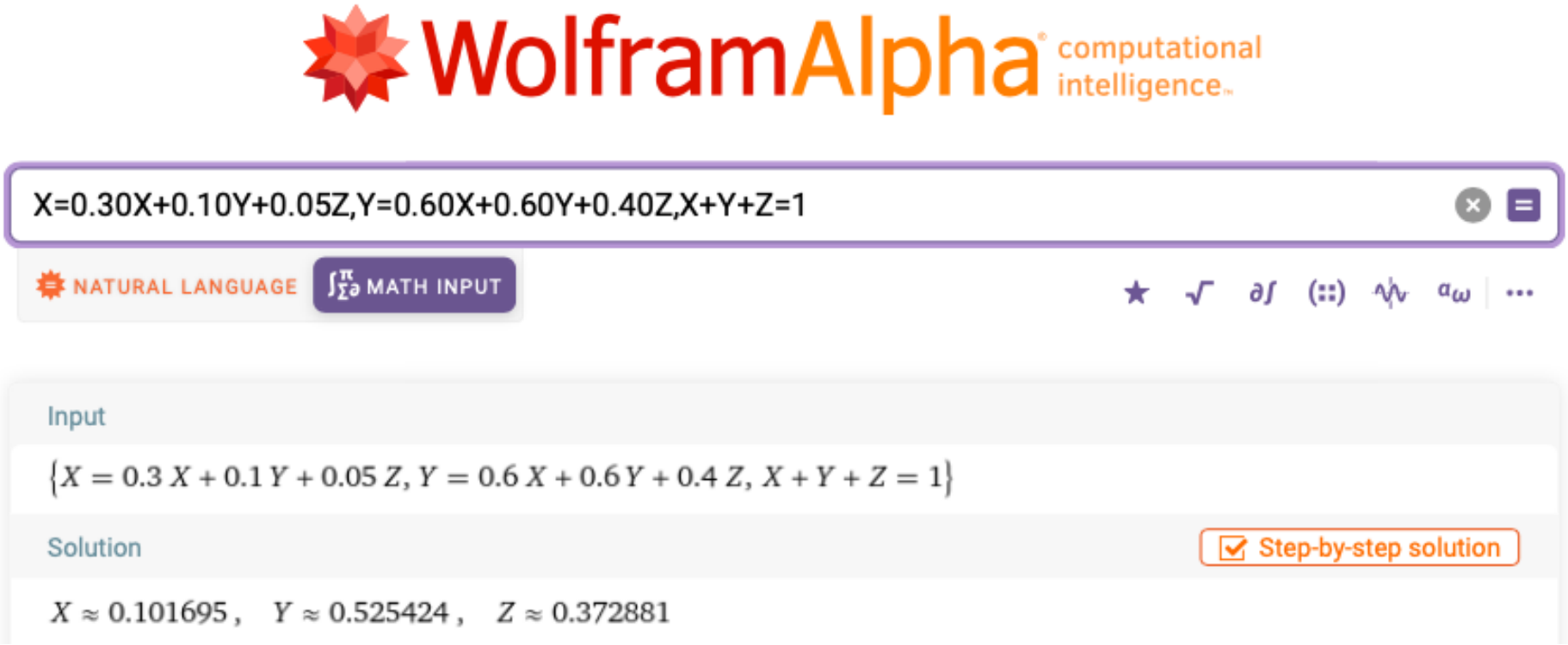
$$x = \frac{4}{3}$$

$$X = 0{,}30X + 0{,}10Y + 0{,}05Z$$
$$Y = 0{,}60X + 0{,}60Y + 0{,}40Z$$
$$Z = 0{,}10X + 0{,}30Y + 0{,}55\,Z$$
$$X + Y + Z = 1$$

Para resolver este sistema de ecuaciones sólo ocupamos dos de las tres ecuaciones (puede ser cualquiera de esas 3) más la ecuación que está igualada a 1.



Vea que los decimales en wolfram están separados por **puntos** NO con comas, si usas comas te dará una respuesta incorrecta ya que las comas se usan para separar las ecuaciones.



Probabilidades del Estado Estable

Ejercicio 4.
Estado estable.

Una tienda inicia una semana con al menos 3 PC. La demanda por semana se estima en 0 con probabilidad de 15%, 1 con probabilidad de 20%, 2 con probabilidad de 35%, 3 con probabilidad de 25% y 4 con probabilidad de 5%. La demanda insatisfecha se deja pendiente. La política de la tienda es colocar un pedido para entregarse al inicio de la siguiente semana siempre que el nivel del inventario se reduzca por debajo de 3 PC. El nuevo pedido regresa las existencias a 5 PC.

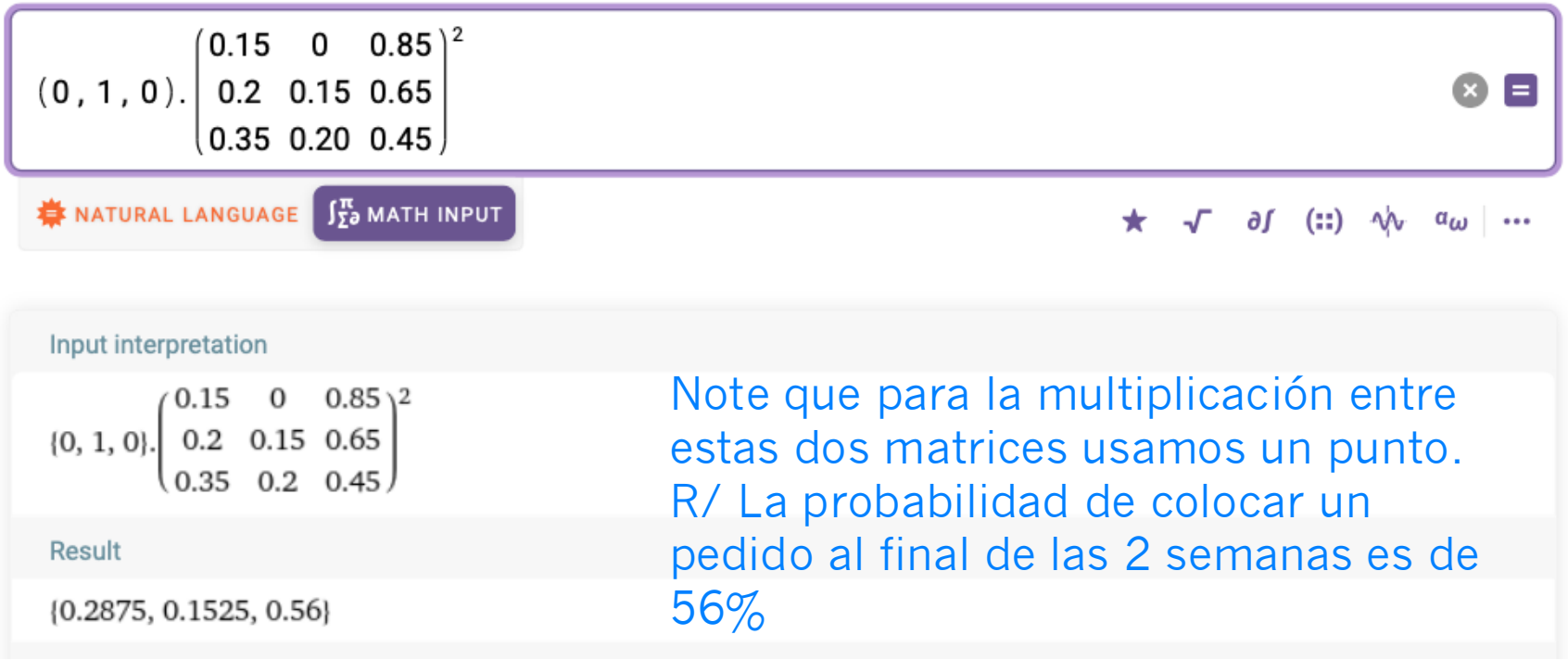
a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

b) Suponga que la semana se inicia con 4 PC. Determine la probabilidad de que un pedido se coloque al final de dos semanas.

c) Determine la probabilidad a largo plazo de que no se coloque ningún pedido en cualquier semana.

d) Si el costo fijo de colocar un pedido es de $200, el costo de conservación por PC por semana es de $5 y el costo de penalización por computadora faltante es de $20, determine el costo del inventario esperado por semana.

b) Para determinar que un pedido se coloque al final de la segunda semana debemos multiplicar la matriz de la posición inicial por la matriz de la cadena de Markov elevada al cuadrado



Note que para la multiplicación entre estas dos matrices usamos un punto.
R/ La probabilidad de colocar un pedido al final de las 2 semanas es de 56%

Ejercicio 4.
Estado estable

Una tienda inicia una semana con al menos 3 PC. La demanda por semana se estima en 0 con probabilidad de 15%, 1 con probabilidad de 20%, 2 con probabilidad de 35%, 3 con probabilidad de 25% y 4 con probabilidad de 5%. La demanda insatisfecha se deja pendiente. La política de la tienda es colocar un pedido para entregarse al inicio de la siguiente semana siempre que el nivel del inventario se reduzca por debajo de 3 PC. El nuevo pedido regresa las existencias a 5 PC.

a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

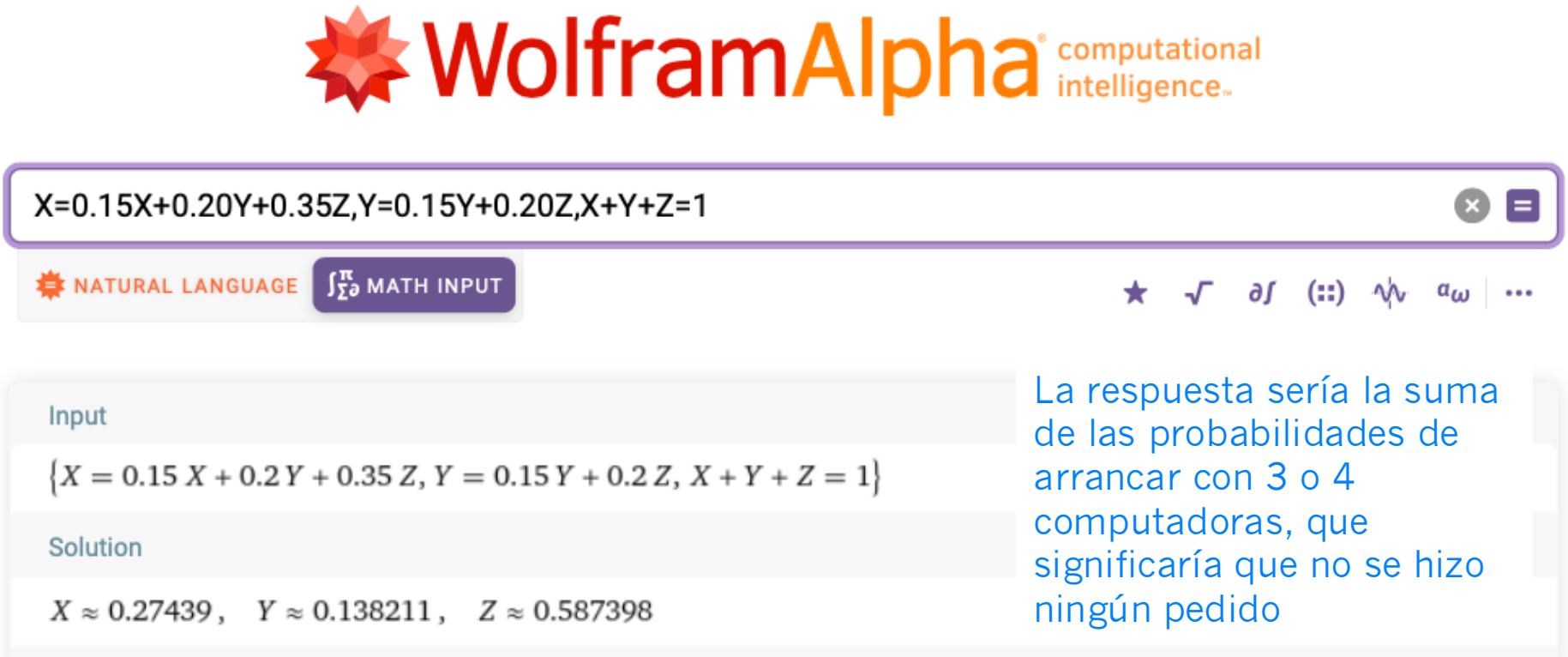
b) Suponga que la semana se inicia con 4 PC. Determine la probabilidad de que un pedido se coloque al final de dos semanas.

c) Determine la probabilidad a largo plazo de que no se coloque ningún pedido en cualquier semana.

d) Si el costo fijo de colocar un pedido es de $200, el costo de conservación por PC por semana es de $5 y el costo de penalización por computadora faltante es de $20, determine el costo del inventario esperado por semana.

c) Para contestar la probabilidad de no colocar ningún pedido en el largo plazo ocupamos las probabilidades del estado estable.

P(π1 π2 π3) =	X =	0,15X + 0,20Y + 0,35Z
	Y =	0,15Y + 0,20Z
	Z =	0,85X + 0,65Y + 0,45Z
		X + Y + Z =1



La respuesta sería la suma de las probabilidades de arrancar con 3 o 4 computadoras, que significaría que no se hizo ningún pedido

Ejercicio 4.
Estado estable

Una tienda inicia una semana con al menos 3 PC. La demanda por semana se estima en 0 con probabilidad de 15%, 1 con probabilidad de 20%, 2 con probabilidad de 35%, 3 con probabilidad de 25% y 4 con probabilidad de 5%. La demanda insatisfecha se deja pendiente. La política de la tienda es colocar un pedido para entregarse al inicio de la siguiente semana siempre que el nivel del inventario se reduzca por debajo de 3 PC. El nuevo pedido regresa las existencias a 5 PC.

a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

b) Suponga que la semana se inicia con 4 PC. Determine la probabilidad de que un pedido se coloque al final de dos semanas.

c) Determine la probabilidad a largo plazo de que no se coloque ningún pedido en cualquier semana.

d) Si el costo fijo de colocar un pedido es de $200, el costo de conservación por PC por semana es de $5 y el costo de penalización por computadora faltante es de $20, determine el costo del inventario esperado por semana.

Ejercicio 4

La pregunta d se resuelve en excel con la ayuda de tree plan ya que debemos realizar un árbol de decisiones para encontrar la respuesta, para ello haga el árbol con su profesor y profesora.