



Teoría de Colas

Modelos de Líneas de Espera

Análisis de Costos en modelos de líneas de espera





LA TEORÍA DE COLAS ES EL ESTUDIO MATEMÁTICO DE LAS COLAS O LÍNEAS DE ESPERA DENTRO DE UN SISTEMA AL CUAL LLEGAN DIFERENTES TIPOS DE CLIENTES PARA DEMANDAR ALGÚN TIPO DE SERVICIO.

Diferentes tipos de Llegadas.

Llamaremos llegadas al que utiliza el servidor para recibir los servicios, pueden ser personas en una peluquería o aviones llegando a la pista de aterrizaje de un aeropuerto



El servidor

Instalación donde se demandan servicios y está compuesto por todos los activos necesarios para brindar el servicio.



Dos Características Importantes

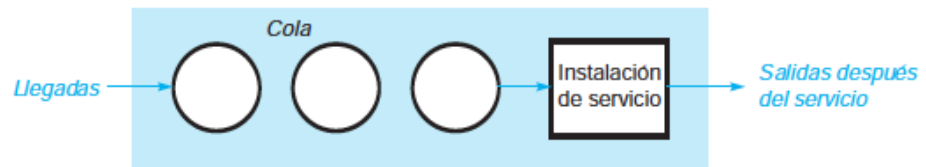
TIEMPO DE ESPERA NO MUY LARGO



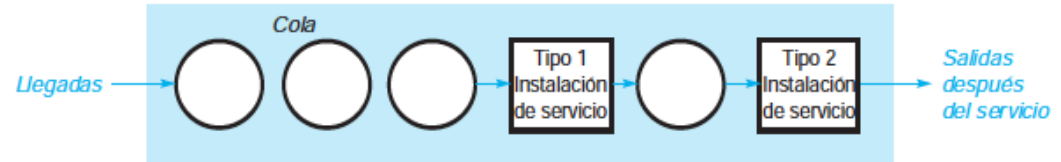
COSTO DE SERVICIO NO SEA MUY ALTO



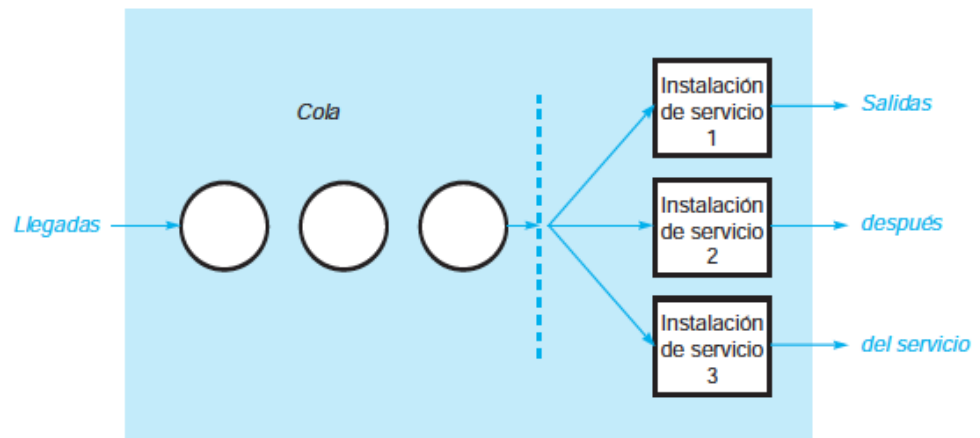
Cuatro configuraciones básicas



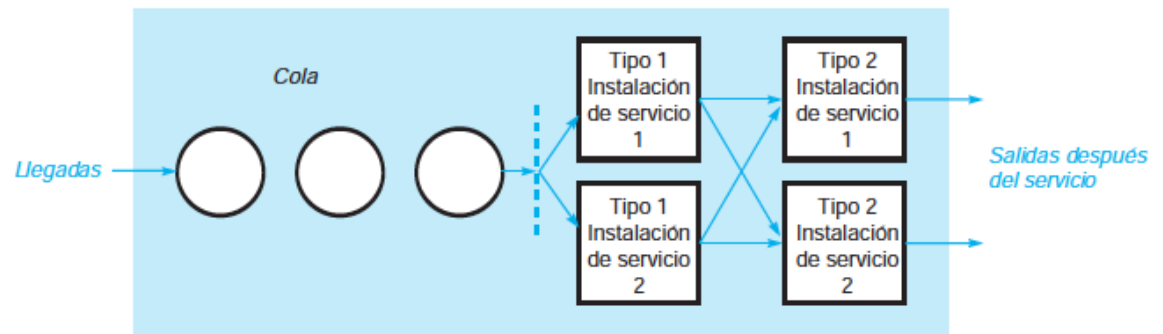
Sistema de un solo canal, una sola fase



Sistema de un solo canal, multifase



Sistema multicanal de una sola fase

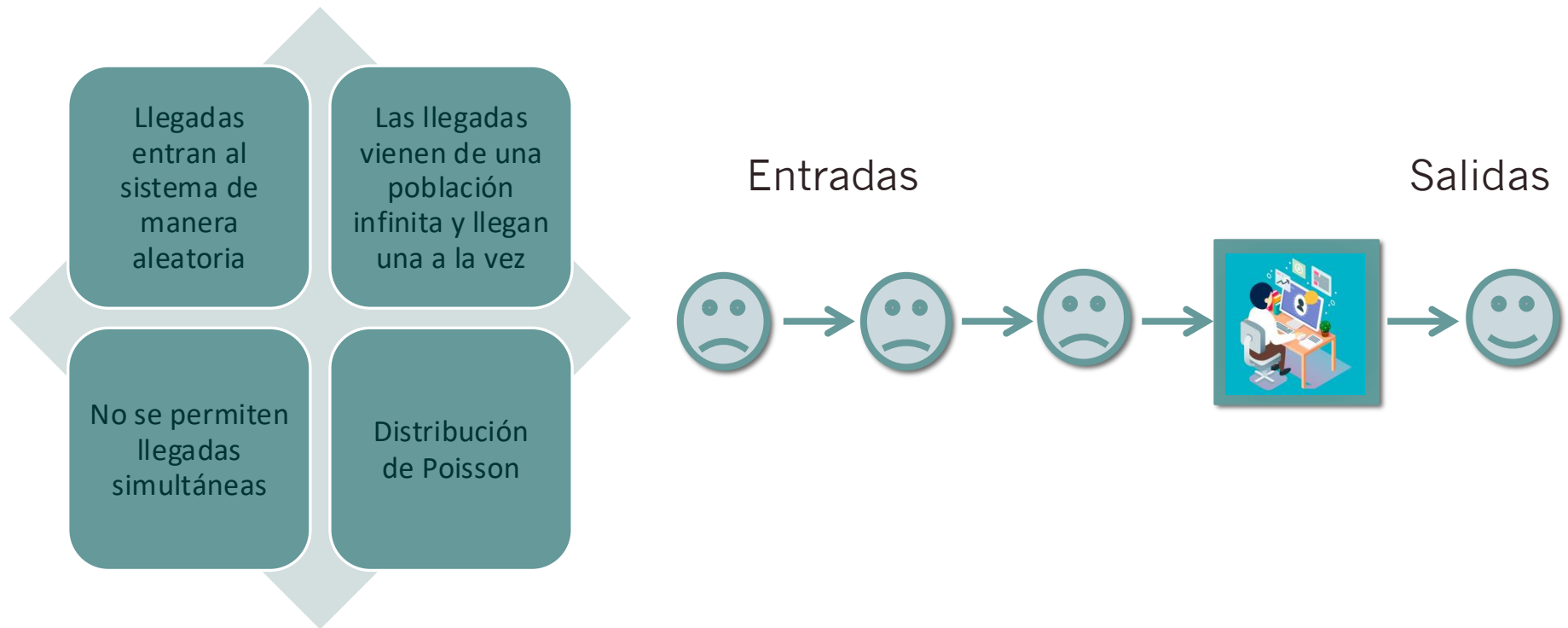


Sistema multicanal, multifase

El Modelo Básico

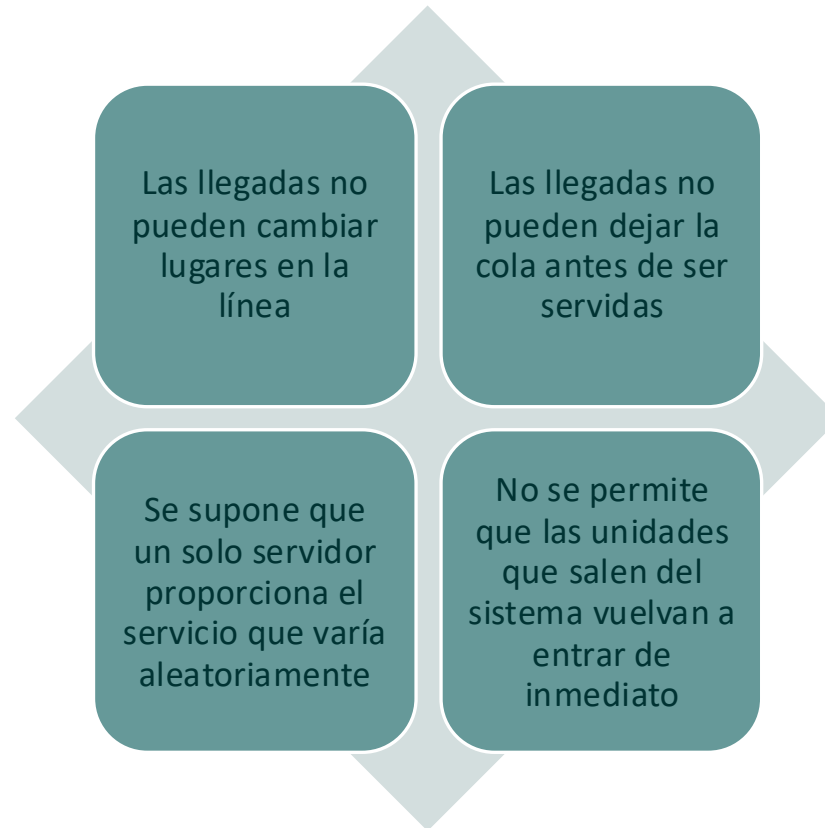
Una Cola un Servidor

Este sistema se conoce como cola de espera de un servidor. Supuestos:



El Modelo Básico

Otros supuestos:



Características de Operación

a) Análisis de la Cola

Longitud Promedio
de la Cola

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Tiempo de Espera
Promedio en la Cola

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

En donde:

λ es la tasa promedio de llegadas por unidad de tiempo

μ es la tasa promedio de servicio de las llegadas por unidad de tiempo

Estabilidad del sistema $\lambda < \mu$

Características de Operación

b) Análisis del Sistema

Longitud Promedio
del Sistema

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Tiempo de Espera
Promedio en el Sistema

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Regla general: la tasa de llegada debe ser menor
que la tasa de servicio

Características de Operación

c) Utilización de la instalación de servicio

Probabilidad de que el sistema esté vacío:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo de actividad esperado en el sistema:

$$U = 1 - P_0$$

Probabilidad de tener n unidades en el sistema:

$$P_n = \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]^n P_0$$

Probabilidad de que la línea exceda a L:

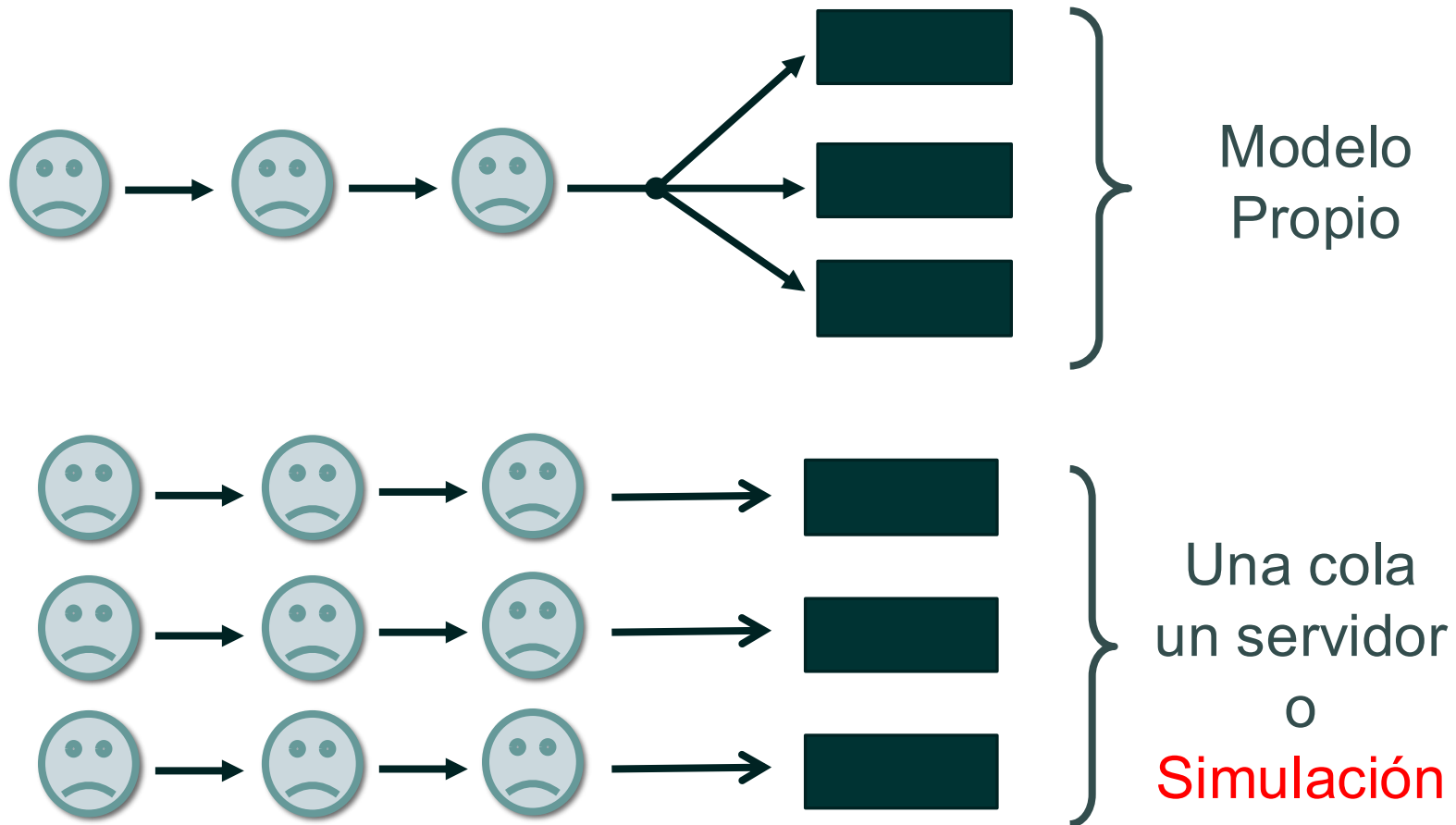
$$P(n > L) = \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]^{L+1}$$

Ejemplo 1

Baje de la página del curso el archivo de Excel con el nombre: Sesión 06 ejercicios de teoría de colas 1.

Para utilizar una máquina cajera automática de un banco, llegan clientes al azar a una tasa de 5 por hora. Si la máquina cajera puede despachar a 10 clientes por hora, determine el actual sistema de operación de esta instalación de servicio.

Modelos con Servidores Múltiples



Modelos de Servidores Múltiples

Una cola Varios Servidores

a) Análisis de la cola

Longitud Promedio
de la Cola

$$Lq = \frac{(\lambda/\mu)^{C+1}}{C \times C! \left[1 - \frac{\lambda/\mu}{C}\right]^2} \times P_0$$

Tiempo de Espera
Promedio en la Cola

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

C = el número de servidores

Modelos de Servidores Múltiples

Una cola Varios Servidores

b) Análisis del Sistema

Longitud Promedio
del Sistema

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo de Espera
Promedio en el Sistema

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

c) Utilización de la instalación de servicio

Probabilidad de que el sistema esté vacío

$$P_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c}{c! \left[1 - \frac{\lambda/\mu}{c} \right]} + 1 + \frac{(\lambda/\mu)^1}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^{(c-1)}}{(c-1)!} \right]^{-1}$$

$$\text{Estabilidad del Sistema} = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

Ejemplo 2

A un restaurante de comida rápida llegan 50 clientes por hora, si la tasa de servicio es de 20 clientes por hora describa las características de operación del restaurante suponiendo que sólo hay una fila.



Calculo del Po con la tabla

Entra a la página del curso, ahí busque ejercicios de clase, entre a la carpeta de Métodos Cuantitativos II y buscas un PDF con el nombre Tabla para el cálculo de Po.





Tabla para el cálculo de P_0
Para el modelo de una cola varios servidores

c					
λ/μ	1	2	3	4	5
0.100	0.90000	0.90476	0.90484	0.90484	0.90484
0.200	0.80000	0.81818	0.81871	0.81873	0.81873
0.300	0.70000	0.73913	0.74074	0.74081	0.74082
0.400	0.60000	0.66667	0.67010	0.67031	0.67032
0.500	0.50000	0.60000	0.60606	0.60650	0.60653
0.600	0.40000	0.53846	0.54795	0.54874	0.54881
0.700	0.30000	0.48148	0.49516	0.49645	0.49657
0.800	0.20000	0.42857	0.44715	0.44910	0.44931
0.900	0.10000	0.37931	0.40346	0.40621	0.40653
1.000		0.33333	0.36364	0.36735	0.36782
1.100		0.29032	0.32730	0.33212	0.33277
1.200		0.25000	0.29412	0.30017	0.30105
1.300		0.21212	0.26377	0.27119	0.27233
1.400		0.17647	0.23599	0.24488	0.24633
1.500		0.14286	0.21053	0.22099	0.22277
1.600		0.11111	0.18717	0.19929	0.20144
1.700		0.08108	0.16571	0.17956	0.18211
1.800		0.05263	0.14599	0.16162	0.16460
1.900		0.02564	0.12783	0.14530	0.14872
2.000			0.11111	0.13043	0.13433
2.100			0.09569	0.11690	0.12128
2.200			0.08147	0.10456	0.10944
2.300			0.06833	0.09332	0.09870
2.400			0.05618	0.08306	0.08895
2.500			0.04494	0.07369	0.08010
2.600			0.03454	0.06515	0.07207
2.700			0.02491	0.05734	0.06477



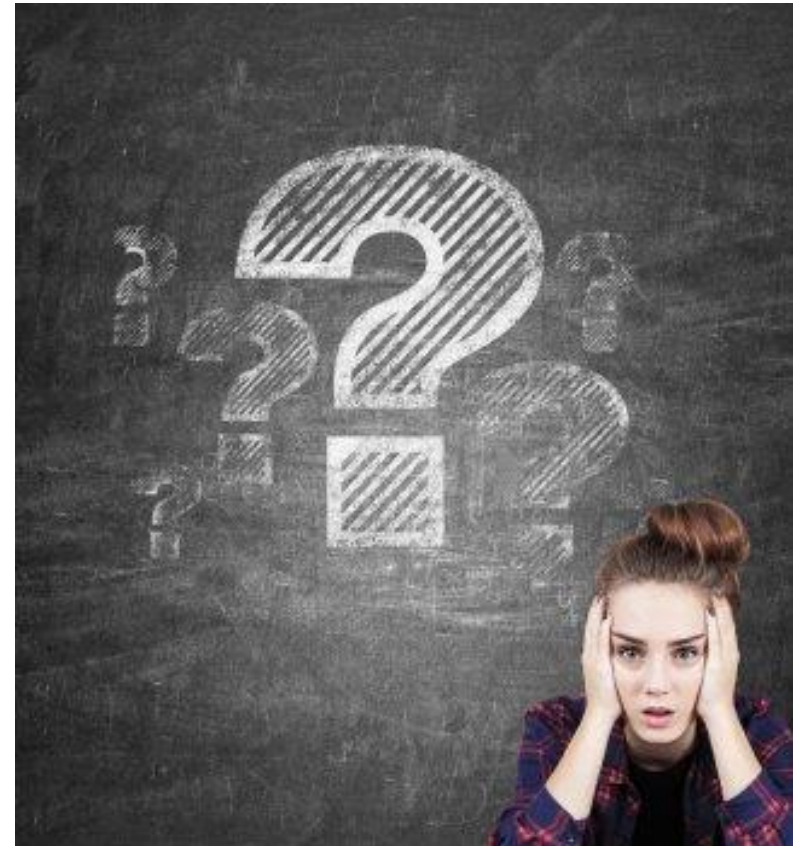
Tabla para el cálculo de P_0
Para el modelo de una cola varios servidores

c					
λ/μ	1	2	3	4	5
0.100	0.90000	0.90476	0.90484	0.90484	0.90484
0.200	0.80000	0.81818	0.81871	0.81873	0.81873
0.300	0.70000	0.73913	0.74074	0.74081	0.74082
0.400	0.60000	0.66667	0.67010	0.67031	0.67032
0.500	0.50000	0.60000	0.60606	0.60650	0.60653
0.600	0.40000	0.53846	0.54795	0.54874	0.54881
0.700	0.30000	0.48148	0.49516	0.49645	0.49657
0.800	0.20000	0.42857	0.44715	0.44910	0.44931
0.900	0.10000	0.37931	0.40346	0.40621	0.40653
1.000		0.33333	0.36364	0.36735	0.36782
1.100		0.29032	0.32730	0.33212	0.33277
1.200		0.25000	0.29412	0.30017	0.30105
1.300		0.21212	0.26377	0.27119	0.27233
1.400		0.17647	0.23599	0.24488	0.24633
1.500		0.14286	0.21053	0.22099	0.22277
1.600		0.11111	0.18717	0.19929	0.20144
1.700		0.08108	0.16571	0.17956	0.18211
1.800		0.05263	0.14599	0.16162	0.16460
1.900		0.02564	0.12783	0.14530	0.14872
2.000			0.11111	0.13043	0.13433
2.100			0.09569	0.11690	0.12128
2.200			0.08147	0.10456	0.10944
2.300			0.06833	0.09332	0.09870
2.400			0.05618	0.08306	0.08895
2.500			0.04494	0.07369	0.08010
2.600			0.03454	0.06515	0.07207
2.700			0.02491	0.05734	0.06477

¿Pero si λ fuera 96 y μ 66.67?

λ/μ	1	2	3
0.100	0.90000	0.90476	0.90484
0.200	0.80000	0.81818	0.81871
0.300	0.70000	0.73913	0.74074
0.400	0.60000	0.66667	0.67010
0.500	0.50000	0.60000	0.60606
0.600	0.40000	0.53846	0.54795
0.700	0.30000	0.48148	0.49516
0.800	0.20000	0.42857	0.44715
0.900	0.10000	0.37931	0.40346
1.000		0.33333	0.36364
1.100		0.29032	0.32730
1.200		0.25000	0.29412
1.300		0.21212	0.26377
1.400		0.17647	0.23599
1.500		0.14286	0.21053
1.600		0.11111	0.18717
1.700		0.08108	0.16571
1.800		0.05263	0.14599
1.900		0.03448	0.12783
2.000		0.02632	0.11111
2.100		0.01905	0.09569
2.200		0.01515	0.08147
2.300		0.01176	0.06833

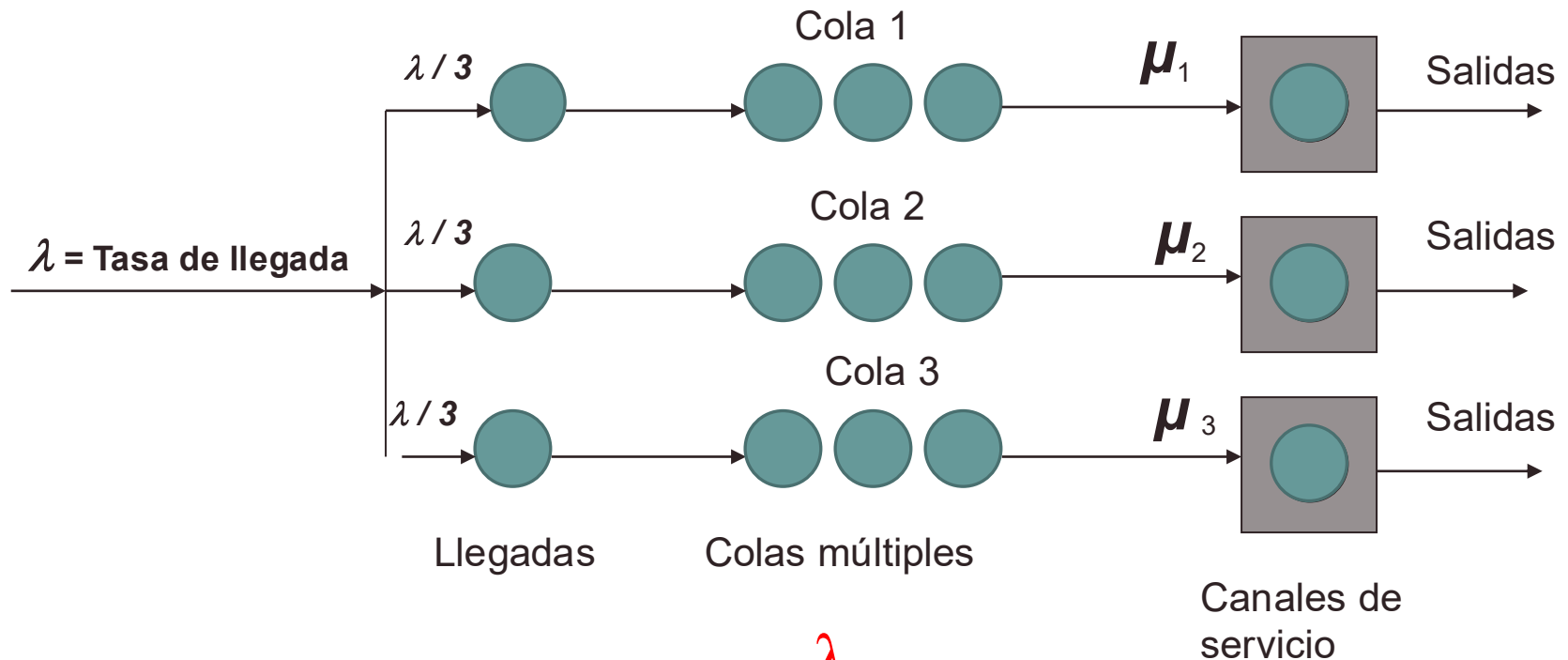
$$\lambda/\mu = 96/66.67 = 1.44$$



Modelos de Servidores Múltiples

Varias colas Varios Servidores

Supuesto de división de llegadas. Fórmulas 1 cola 1 servidor



$$\text{Estabilidad del Sistema} = \frac{\lambda}{F} < \mu$$

Ejemplo 3

A un restaurante de comida rápida llegan 50 clientes por hora, si la tasa de servicio es de 20 clientes por hora describa las características de operación del restaurante suponiendo que cada caja tiene su propia fila.





Análisis Económico

Cs = Costo de Servicio

Cw = Costo de Espera

Análisis Económico

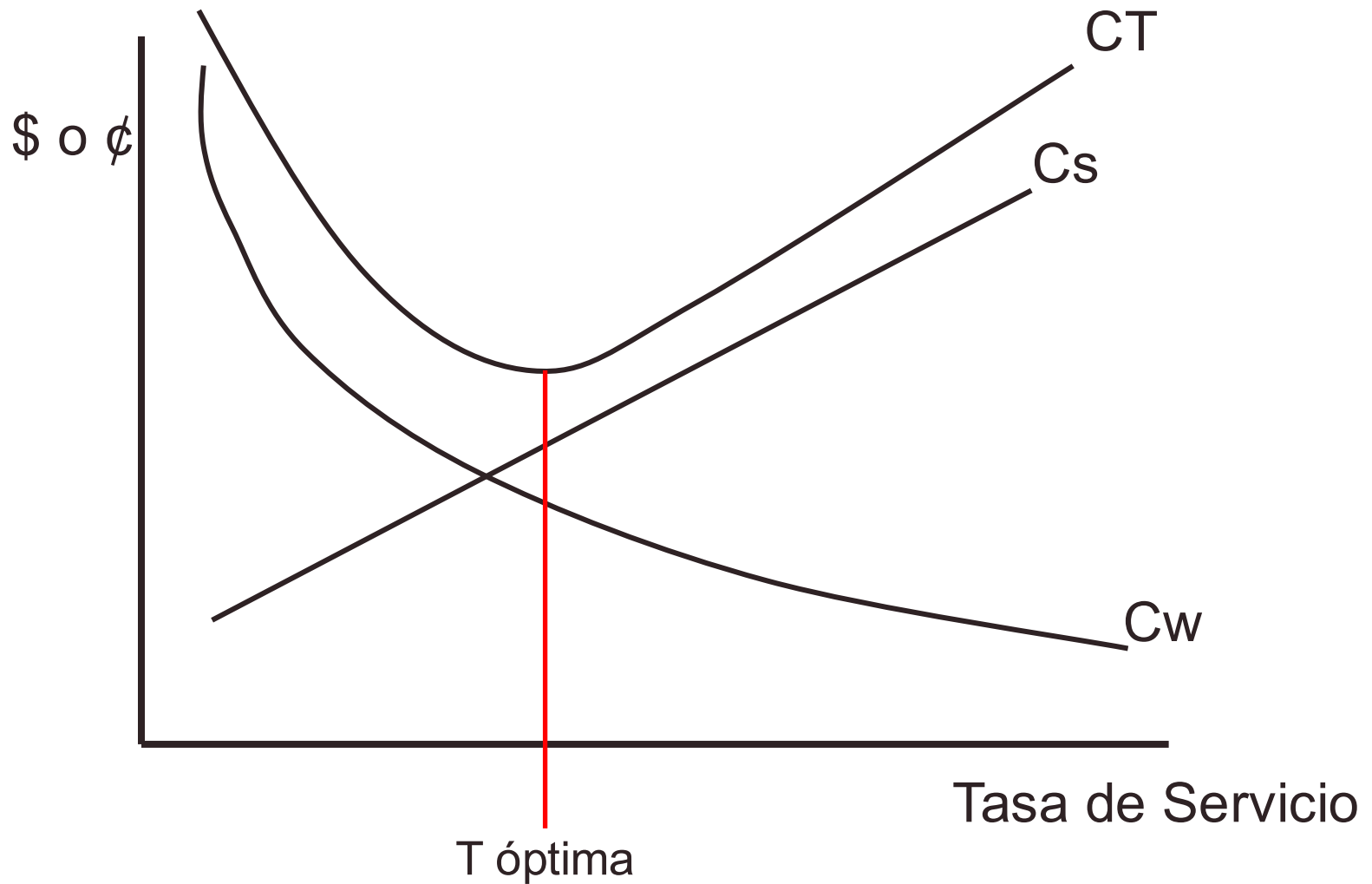


Costo de
servicio C_s

Costo de
espera C_w



Costo del Sistema



Costo del Sistema de Colas

$$CT = (Cw \times L \times F) + (Cs \times C \times k)$$

En donde:

Cw = Costo de espera

F = Número de filas en el sistema

Cs = Costo del servicio

C = Número de servidores en el sistema

k = Cantidad de empleados en el servidor

Desempeño en el Servidor

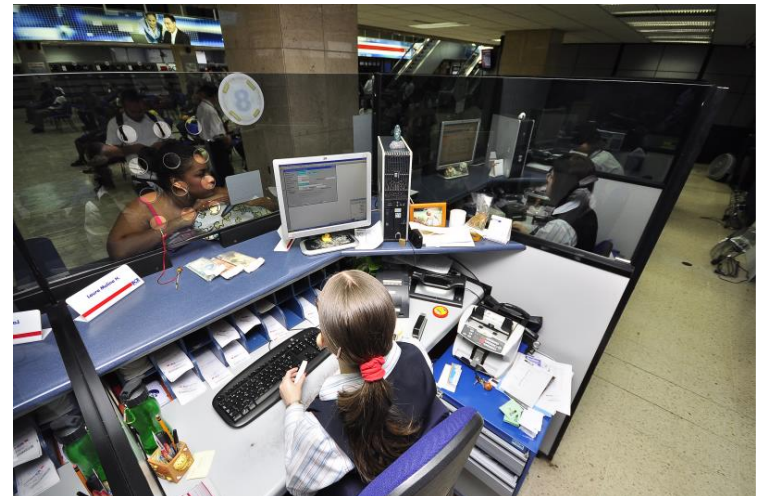


Trabajo en equipo

Se tiene un tasa de cambio μ_c

Trabajo individualizado

Se tiene un tasa de servicio μ



Ejemplo 4

Una cola un servidor

Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones para aprender cómo debe formarse una brigada. El muelle solo tiene espacio para un camión, el tiempo de descarga puede reducirse aumentando el tamaño de la brigada. Las llegadas tienen un comportamiento Poisson y tiempo de servicios exponenciales.

La tasa promedio de servicio es un camión por hora para un cargador; los camiones llegan a una tasa de dos por hora, en promedio y el costo de espera es de \$20 por hora por camión.

Si se le paga \$5 la hora a cada miembro de la brigada ¿Cuál es el mejor tamaño de esta?

Ejemplo 5

Una cola varios servidores

En una institución pública se está estudiando el problema de determinar el número óptimo de empleados que hay que colocar para determinar el número de ventanillas que debe abrir para el pago de viáticos para funcionarios que viajan dentro del país. Los funcionarios llegan a la única fila que hay a una tasa de 1.6 por minuto en promedio y se comporta como una distribución de Poisson. La tasa de servicio es de 0.9 personas por minuto y se comporta como una función exponencial negativa. El sueldo por hora de un funcionario es de \$600 mientras que los cajeros ganan \$300 por hora.

Ejemplo 6

Varias colas varios servidores

Una empresa que se dedica a la manufactura de tela, tiene en su planta un gran número de máquinas tejedoras que con frecuencia se atascan. La reparación de esas máquinas se realizaba por subcontratación de mecánicos, sin embargo, el tiempo de respuesta de estos mecánicos es muy lento incluso de semanas, por ello la empresa ha decidido contratar sus propios mecánicos para agilizar el proceso de reparación. Actualmente la empresa no tiene espacio físico para instalar un gran taller de mantenimiento y reparación, en lugar de ello se propone instalar pequeños talleres de reparación formados por un solo mecánico por taller y ubicarlos en las esquinas de la planta. La aparición de máquinas atascadas puede ser aproximada por un proceso de llegadas Poisson con una tasa promedio de 10 por hora.

Cada máquina atascada requiere una cantidad aleatoria de tiempo para su reparación que puede ser aproximada por una distribución exponencial con un tiempo promedio de servicio de 10 minutos. El costo de una hora de producción perdida debería incluir costos explícitos, como la cantidad de ganancias no obtenidas y los costos implícitos como, la pérdida de voluntad por parte de los clientes, si no se cumple con la fecha de entrega de la mercadería. Si cada mecánico le cuesta a la empresa \$1500 por hora, incluyendo las cargas sociales; y a su vez el departamento de contabilidad ha estimado que la compañía pierde \$2000 por cada hora que una máquina esté fuera de operación. Determine la cantidad de mecánicos que debe tener el departamento de mantenimiento de la empresa, para minimizar los efectos de las composuras de las máquinas en sus costos.

Estudio de caso

Hotel Winter Park

Donna Shader, gerente del hotel Winter Park, desea reestructurar la recepción para lograr un nivel óptimo de eficacia del personal y servicio al cliente. En este momento, el hotel tiene cinco empleados en servicio, cada uno de los cuales atiende una línea de espera por separado, durante el horario de registro con mayor afluencia, de 3:00 P.M. a 5:00 P.M. La observación de las llegadas durante este tiempo muestra que llega un promedio de 90 huéspedes por hora (aunque no existe un límite superior en el número de huéspedes que podrían llegar en un momento dado). A un empleado del mostrador le toma un promedio de 3 minutos registrar a cada huésped.

Donna considera tres planes para mejorar el servicio a los huéspedes mediante la reducción del tiempo que pasan en la línea de espera. En la primera propuesta, designaría a un empleado como agente de servicio rápido para aquellos huéspedes que se registran con cuentas corporativas, un segmento de mercado que abarca aproximadamente el 30% de las reservaciones. Debido a que los huéspedes corporativos están registrados previamente, el proceso de registro en el hotel tan solo requiere dos minutos. Cuando se logra separar a este tipo de clientes del resto, el registro de un huésped típico podría subir a 3.4 minutos. De acuerdo con el plan 1, los huéspedes que no pertenecen a cuentas corporativas podrían seleccionar cualquiera de las otras cuatro filas.

El segundo plan consiste en implementar un sistema de una sola línea. Todos los huéspedes formarían una única fila para ser

atendidos por cualquiera de los cinco empleados que estuviera disponible. Esta opción requiere de un espacio suficiente en la recepción para que se forme una fila larga.

La tercera propuesta implica el uso de un cajero automático (ATM) para los registros. Este cajero automático daría aproximadamente la misma tasa de servicio que ofrece un agente. Considerando que el uso inicial de esta tecnología es mínimo, Shader estimó que 20% de los clientes, en especial los más frecuentes, estarían dispuestos a utilizar máquinas. (Este porcentaje podría ser una estimación conservadora si los huéspedes percibieran los beneficios directos que ofrece el uso de un cajero automático, como lo hacen los clientes bancarios. Citibank informa que el 95% de sus clientes en Manhattan emplea sus cajeros automáticos). Donna establecería una única fila para los clientes que prefieren tratar con personal del mostrador. Estos huéspedes podrían ser atendidos por los cinco empleados, aunque Donna tiene la esperanza de que la máquina le ayudara a reducirlos a cuatro.

Preguntas para análisis

1. Determine el tiempo promedio que emplea un huésped en registrarse. ¿Cómo podría cambiarlo con cada una de las opciones establecidas?
2. ¿Cuál de las opciones recomienda usted?