



Programación Lineal

Programación Entera Pura y Mixta

Programación Binaria



Programación Entera

Un modelo de Programación Entera es aquel cuya solución óptima tiene sentido solamente si una parte o todas las variables de decisión toman valores restringidos a números enteros, permitiendo incorporar en el modelamiento matemático algunos aspectos que quedan fuera del alcance de los modelos de Programación Lineal.



Tres tipos

- 1) Los problemas de ***programación entera pura*** son casos donde se requiere que todas las variables tengan valores enteros.
- 2) Los problemas de ***programación entera mixta*** son casos en los cuales se requiere que algunas variables de decisión, aunque no todas, tengan valores enteros.
- 3) Los problemas de ***programación entera cero-uno*** son casos especiales donde todas las variables de decisión deben tener valores de solución enteros de 0 o 1.

Una consideración importante es que una solución obtenida con programación entera nunca genera una utilidad mayor que la que se logra con la PL del mismo problema; casi siempre significa un valor menor.

Ejercicio de Programación Entera Pura

Elizabeth Bailey es la propietaria y gerente general de Princess Brides, que ofrece servicios de planeación de bodas en el suroeste de Louisiana. Utiliza publicidad en radio para promover su negocio. Están disponibles dos tipos de anuncios: aquellos que se difunden durante las horas de mayor audiencia y los que se transmiten en otras horas. Cada anuncio durante el tiempo de audiencia máxima cuesta \$390 y llega a 8,200 personas; mientras que los anuncios en las horas de menor audiencia cuestan \$240 cada uno y llegan a 5,100 personas. Bailey ha presupuestado \$1,800 semanales para publicidad. Basada en comentarios de sus clientes, desea tener por lo menos dos anuncios en horas de máxima audiencia y no más de 6 en horas no pico.

Formule y resuelva el problema como uno de programación entera.

X_1 = Número de anuncios a contratar en horas de mayor audiencia

X_2 = Número de anuncios a contratar en otras horas

$$\text{FO Max } Z = 8200X_1 + 5100X_2$$

Sujeto a :

$$390X_1 + 240X_2 \leq 1800$$

$$X_1 \geq 2$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_i \geq 0$$

X_i , enteros

Resolución con Excel

En www.ucreanop.com
en ejercicios de clase
busque el archivo de
Excel con el nombre
Sesión 01 ejercicios de
programación entera,
mixta y binaria.



Vamos a resolver el primer planteo visto en clase

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following content:

- Formulas Bar:** Displays the active cell as C11 and the formula as $X_i, \text{ enteros}$.
- Worksheet Grid:**
 - Row 2: $X_1 = \text{Número de anuncios a contratar en horas de mayor audiencia}$
 - Row 3: $X_2 = \text{Número de anuncios a contratar en otras horas}$
 - Row 5: F.O Max $Z = 8200 X_1 + 5100 X_2$
 - Row 6: Sujeto a :
 - Row 7: $390 X_1 + 240 X_2 \leq 1800$
 - Row 8: $X_2 \leq 6$
 - Row 9: $X_1 \geq 2$
 - Row 10: $X_i \geq 0$
 - Row 11: $X_i, \text{ enteros}$ (This cell is highlighted with a green border)

A la derecha del planteo montaremos una tabla en excel para resolver el problema de programación lineal entera con Solver.

Se colocan primero las variables, coeficientes y cantidades para calcular la F.O. y de segundo irán las restricciones.

X1 = Número de anuncios a contratar en horas de mayor audiencia						
X2 = Número de anuncios a contratar en otras horas						
F.O Max Z= 8200 X1 + 5100 X2				Variables	X1	X2
Sujeto a :				Coeficiente en F.O		
	390 X1 + 240 X2 ≤ 1800			Cantidades		
	X 2 ≤ 6			Restricciones		
	X 1 ≥ 2			Presupuesto		
	Xi ≥ 0			Mínimo Máx Audiencia		
	Xi, enteros			Máximo Min Audiencia		

Variables	X1	X2	
Coeficiente en F.O			
Cantidades			
	Restricciones		
Presupuesto			
Mínimo Máx Audiencia			
Máximo Min Audiencia			

$$\text{F.O Max } Z = 8200 X_1 + 5100 X_2$$

Sujeto a :

$$390 X_1 + 240 X_2 \leq 1800$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_1 \geq 2$$

$$X_i \geq 0$$

X_i , enteros

Agregamos los coeficientes de las ecuaciones a la tabla que utilizaremos con Solver.

Variables

Coeficiente en F.O

Cantidades

X1

8200

X2

5100

Restricciones

Presupuesto

390

240

Mínimo Máx Audiencia

0

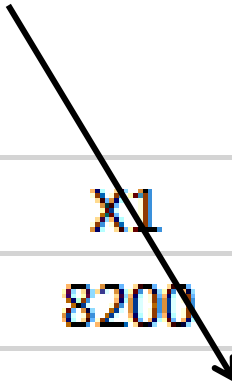
1

Máximo Min Audiencia

1

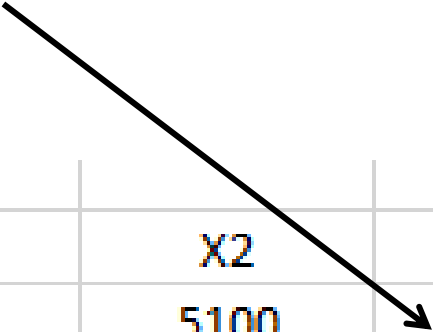
0

Agregamos las cantidades iniciales para resolver el PL



Variables	X1	X2	
Coeficiente en F.O	8200	5100	
Cantidades	0	0	
	Restricciones		
Presupuesto	390	240	
Mínimo Máx Audiencia	0	1	
Máximo Min Audiencia	1	0	

En la celda contigua a las cantidades escribimos la fórmulas para calcular el resultado de la F.O.



Variables	X1	X2	
Coeficiente en F.O	8200	5100	
Cantidades	0	0	
	Restricciones		
Presupuesto	390	240	
Mínimo Máx Audiencia	0	1	
Máximo Min Audiencia	1	0	

Archivo Inicio Insertar Disposición de página

17

X ✓ *f_x*

	A	B	C	D
1				
2		X1 = Número de anuncios a contr		
3		X2 = Número de anuncios a contr		
4				
5		F.O Max Z= 8200 X1 + 5100 X2		
6		Sujeto a :		

Buscamos dentro de las funciones de Excel la fórmula: Sumaproducto

Insertar función



Buscar una función:

Escriba una breve descripción de lo que desea hacer y, a continuación, haga clic en Ir

Ir

O seleccionar una categoría: Usadas recientemente



Seleccionar una función:

SI
ALEATORIO
SUMAPRODUCTO
ABS
PROMEDIO
ESTIMACION.LINEAL
SUMA



SUMAPRODUCTO(matriz1;matriz2;matriz3;...)

Devuelve la suma de los productos de rangos o matrices correspondientes.

[Ayuda sobre esta función](#)

Aceptar

Cancelar

Note que las celdas que corresponden a las cantidades por fabricar han sido fijadas.

Argumentos de función

?

×

SUMAPRODUCTO

Matriz1

G6:H6

↑

= {8200,5100}

Matriz2

\$G\$7:\$H\$7

↑

= {0,0}

Matriz3

↑

= matriz

= 0

Devuelve la suma de los productos de rangos o matrices correspondientes.

Matriz2: matriz1;matriz2;... son de 2 a 255 matrices cuyos componentes se desea multiplicar y después sumar. Todas las matrices deben tener las mismas dimensiones.

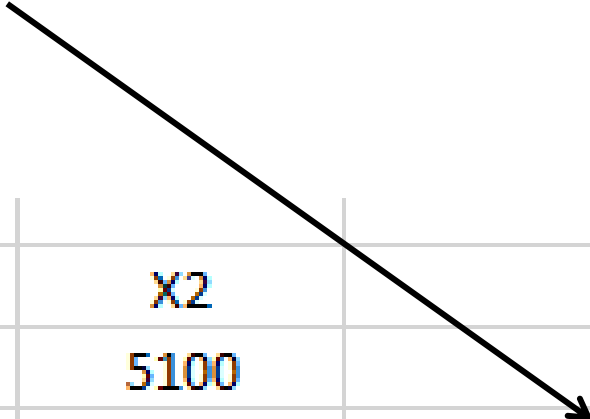
Resultado de la fórmula = 0

[Ayuda sobre esta función](#)

Aceptar

Cancelar

Representa la cantidad de audiencia que se espera tener después de contratar los espacios publicitarios.



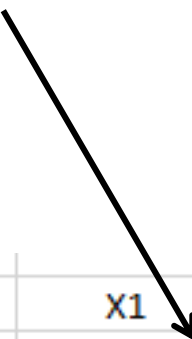
Variables	X1	X2	
Coeficiente en F.O	8200	5100	
Cantidades	0	0	0
	Restricciones		
Presupuesto	390	240	
Mínimo Máx Audiencia	0	1	
Máximo Min Audiencia	1	0	

Copiamos la fórmula de sumaproducto a las restricciones.
 Esto representará el consumo de los recursos.

Variables	X1	X2	
Coeficiente en F.O	8200	5100	
Cantidades	0	0	0
	Restricciones		
Presupuesto	390	240	0
Mínimo Máx Audiencia	0	1	0
Máximo Min Audiencia	1	0	0

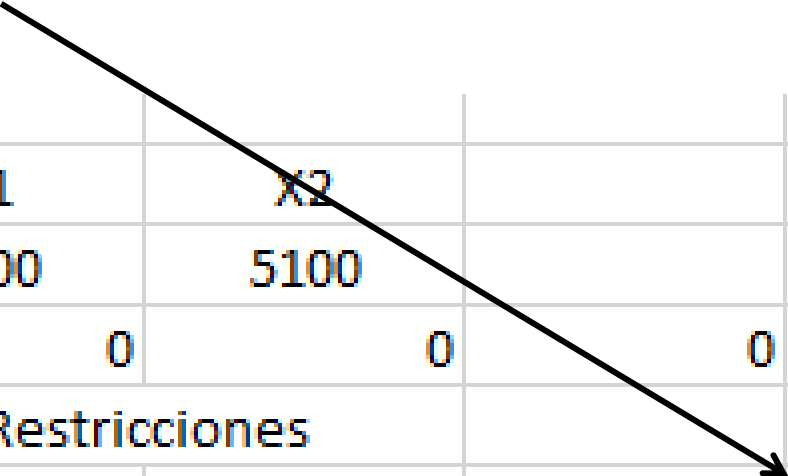


Importante cerci3nese de que a la hora de copiar la f3rmla de sumaproducto, esta copia se haya hecho de forma correcta, las cantidades se deber3a de multiplicar por los coeficientes de las restricciones.



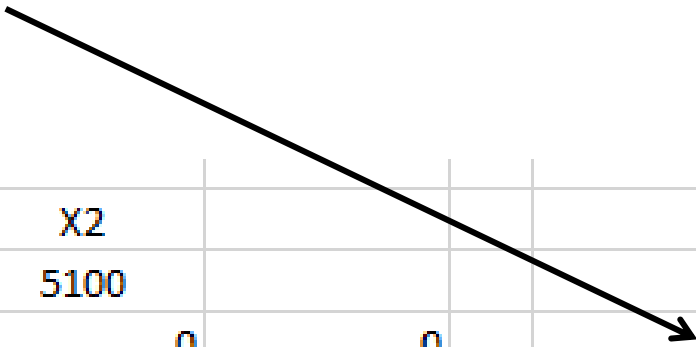
Variables	X1	X2				
Coeficiente en F.O	8200	5100				
Cantidades	0	0	0			
	Restricciones			Disponible	Holgura	
Presupuesto	390	240	=SUMAPRODUCTO(G9:H9;\$G\$7:\$H\$7)			
M3nimo M3x Audiencia	0	1	SUMAPRODUCTO(matriz1; [matriz2]; [matriz3]; [matriz4]; ...)			
M3ximo Min Audiencia	1	0	0 ≥	2	--	

Agregamos los símbolos de desigualdad para cada restricción.
Note que se colocan todas las de menor igual juntas, las de mayor igual juntas y las de igual juntas.



Variables	X1	X2	
Coeficiente en F.O	8200	5100	
Cantidades	0	0	0
	Restricciones		
Presupuesto	390	240	0 ≤
Mínimo Máx Audiencia	0	1	0 ≤
Máximo Min Audiencia	1	0	0 ≥

Para completar la tabla de excel para resolver con Solver, agregamos dos columnas adicionales que representan la cantidad de recursos disponibles de la empresa y la posible holgura después de resolver



Variables	X1	X2			
Coeficiente en F.O	8200	5100			
Cantidades	0	0	0		
	Restricciones			Disponibles	Holgura
Presupuesto	390	240	$0 \leq$		
Mínimo Máx Audiencia	0	1	$0 \leq$		
Máximo Min Audiencia	1	0	$0 \geq$		

$$\text{F.O Max } Z = 8200 X_1 + 5100 X_2$$

Sujeto a :

$$390 X_1 + 240 X_2 \leq 1800$$

$$X_2 \leq 6$$

$$X_1 \geq 2$$

$$X_i \geq 0$$

X_i , enteros

Agregamos la
disponibilidad de
recursos

Variables	X1	X2			
Coeficiente en F.O	8200	5100			
Cantidades	0	0	0		
	Restricciones			Disponible	Holgura
Presupuesto	390	240	$0 \leq$	1800	
Mínimo Máx Audiencia	0	1	$0 \leq$	6	
Máximo Min Audiencia	1	0	$0 \geq$	2	

Calculamos la holgura

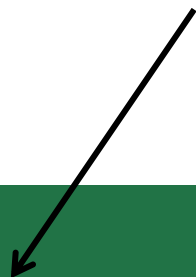
Variables	X1	X2				
Coeficiente en F.O	8200	5100				
Cantidades	0	0	0			
	Restricciones			Disponibles	Holgura	
Presupuesto	390	240	0 ≤	1800	=K9-I9	
Mínimo Máx Audiencia	0	1	0 ≤	6		
Máximo Min Audiencia	1	0	0 ≥	2		

Ya está finalizada la tabla con el modelo para resolver el problema de PL con Solver.

Note que sólo la primera restricción tiene holgura, esto se debe a que es la única limitación, las otras dos restricciones son requerimientos.

Variables	X1	X2				
Coeficiente en F.O	8200	5100				
Cantidades	0	0	0			
	Restricciones				Disponible	Holgura
Presupuesto	390	240	$0 \leq$		1800	1800
Mínimo Máx Audiencia	0	1	$0 \leq$		6	--
Máximo Min Audiencia	1	0	$0 \geq$		2	--

En el Excel vamos a la pestaña de DATOS



Excel ribbon showing the 'Datos' (Data) tab selected. The ribbon includes tabs: Fórmulas, Datos, Revisar, Vista, Programador, Ayuda, and ¿Qué desea hacer?.

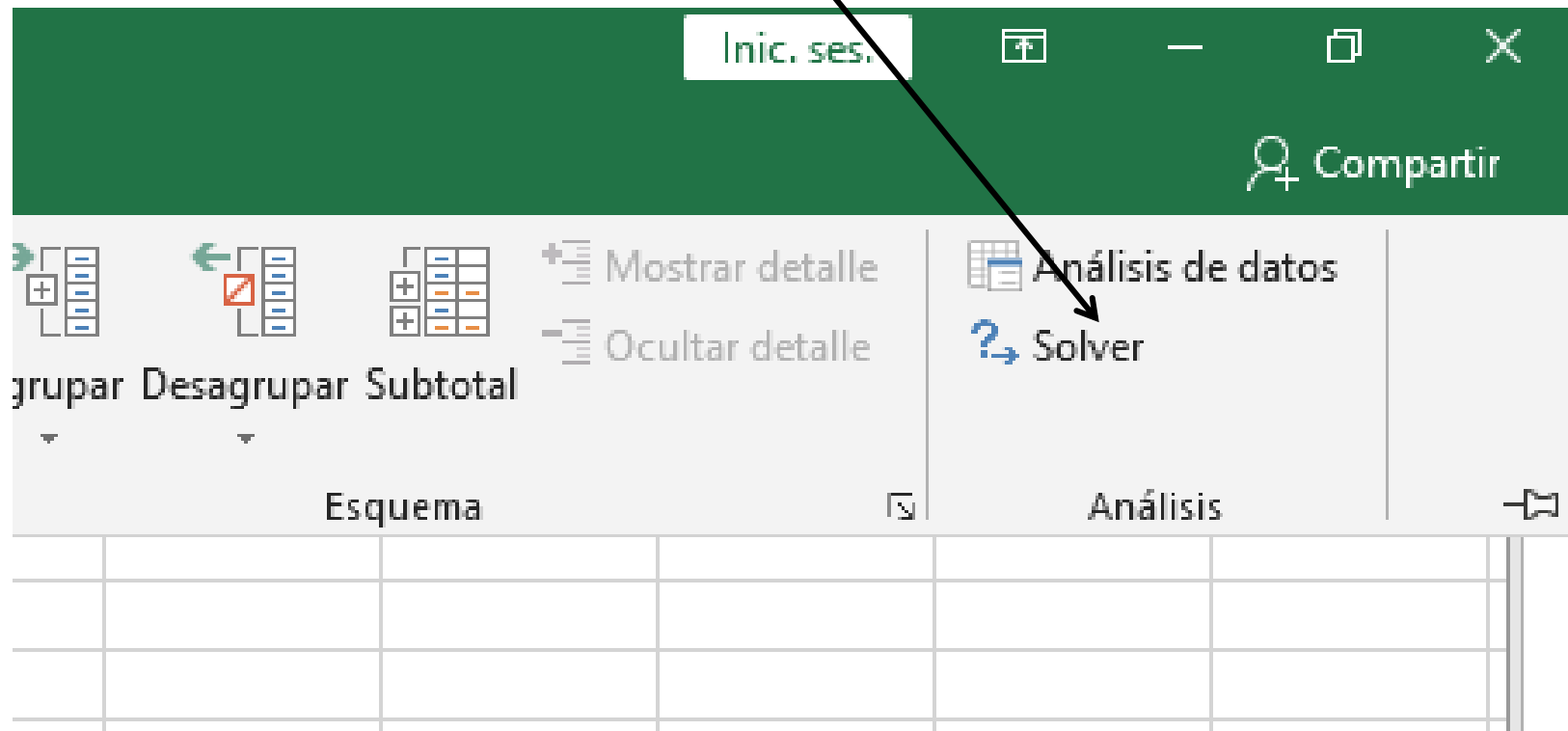
The 'Datos' tab is divided into three main sections:

- Obtener y transformar:** Nueva consulta, Mostrar consultas, Desde una tabla, Fuentes recientes.
- Conexiones:** Actualizar todo, Conexiones, Propiedades, Editar vínculos.
- Ordenar y filtrar:** Ordenar (A-Z, Z-A), Filtro, Borrar, Volver a, Avanzado.

Below the ribbon, a table is visible with the following content:

en horas de mayor audiencia					
en otras horas					
	Variables	X1	X2		

Al final de la pestaña de Datos, encontramos Solver



Parámetros de Solver

Establecer objetivo: 

Para: ☒ Máx ☐ Mín ☐ Valor de:

Cambiando las celdas de variables: 

Sujeto a las restricciones:




Agregar

Cambiar

Eliminar

Restablecer todo

Cargar/Guardar

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución: 

Opciones

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda

Resolver

Cerrar

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

\$I\$7



Para:



Máx



Mín



Valor de:

0

Cambiando las celdas de variables:

\$G\$7:\$H\$7



Sujeto a las restricciones:

Empty list box for constraints.

Agregar

Cambiar

Eliminar

Restablecer todo

Cargar/Guardar



Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

GRG Nonlinear



Opciones

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda

Resolver

Cerrar

X1	X2				
8200	5100				
0	0	0			
Restricciones				Disponible	Holgura
390	240	0 ≤	1800	1800	
0	1	0 ≤	6	--	
1	0	0 ≥	2	--	

Agregar restricción
✕

Referencia de celda

\$I\$9:\$I\$10

⬆

<=

⌵

Restricción:

= \$K\$9:\$K\$10

⬆

Aceptar

Agregar

Cancelar

X1	X2				
8200	5100				
0	0	0			
Restricciones			Disponible	Holgura	
390	240	0 ≤	1800	1800	
0	1	0 ≤	6	--	
1	0	0 ≥	2	--	

Agregar restricción

Referencia de celda

\$I\$11

⬆

Restricción:

<=

⬆

Aceptar

<=

=

>=

int

bin

dif

Cancelar

X1	X2				
8200	5100				
0	0	0			
Restricciones				Disponible	Holgura
390	240	0 ≤	1800	1800	
0	1	0 ≤	6	--	
1	0	0 ≥	2	--	

Agregar restricción

Referencia de celda

Restricción:

\$J\$11

↑

> =

↓

= \$K\$11

↑

Aceptar

Agregar

Cancelar

X1	X2				
8200	5100				
0	0	0			
Restricciones				Disponible	Holgura
390	240	0 ≤		1800	1800
0	1	0 ≤		6	--
1	0	0 ≥		2	--

Agregar restricción

Referencia de celda

Restricción:

\$J\$11

> =

=\$K\$11

Aceptar

Agregar

Cancelar

X1	X2				
8200	5100				
0	0	0			
Restricciones				Disponible	Holgura
390	240	0 ≤		1800	1800
0	1	0 ≤		6	--
1	0	0 ≥		2	--

Agregar restricción

×

Referencia de celda

Restricción:

Aceptar

< =

< =

=

> =

int

bin

dif

Cancelar

Agregar restricción



Referencia de celda

\$G\$7:\$H\$7



int



Restricción:

entero



Aceptar

Agregar

Cancelar

Parámetros de Solver



Establecer objetivo:

\$I\$7



Para:



Máx



Mín



Valor de:

0

Cambiando las celdas de variables:

\$G\$7:\$H\$7



Sujeto a las restricciones:

\$G\$7:\$H\$7 = entero
\$I\$11 >= \$K\$11
\$I\$9:\$I\$10 <= \$K\$9:\$K\$10

Agregar

Cambiar

Eliminar

Restablecer todo

Cargar/Guardar

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Simplex LP

Opciones

Método de resolución

Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda

Resolver

Cerrar

Variables	X1	X2				
Coeficiente en F.O	8200	5100				
Cantidades	4	1	37900			
	Restricciones				Disponible	Holgura
Presupuesto	390	240	1800 ≤		1800	0
Mínimo Máx Audiencia	0	1	1 ≤		6	--
Máximo Min Audiencia	1	0	4 ≥		2	--

Resultados de Solver

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

☒ Conservar solución de Solver
 ☐ Restaurar valores originales

☐ Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver

Informes

Responder

☐ Informes de esquema

Aceptar

Cancelar

Guardar escenario...

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una solución óptima local. Al usar Simplex LP, significa que Solver ha encontrado una solución óptima global.

Esta es la solución que maximiza la audiencia, observe que se consumió la totalidad del presupuesto.

Variables	X1	X2				
Coeficiente en F.O	8200	5100				
Cantidades	4	1	37900			
	Restricciones				Disponible	Holgura
Presupuesto	390	240	1800 ≤		1800	0
Mínimo Máx Audiencia	0	1	1 ≤		6	--
Máximo Min Audiencia	1	0	4 ≥		2	--

Ejercicio de Programación Entera Mixta

La empresa Lácteos S.A., se dedica a la elaboración y venta de queso Turrialba y queso Montino además de leche entera y leche descremada. Las leches las vende en envases tetra brick de 1 litro y los quesos los vende por kilo. Para la elaboración de los quesos se requieren 5 minutos y 30 segundos de mano de obra por cada kilo de queso Turrialba y 7 minutos de mano de obra por cada kilo de queso Montino. El kilo de queso Turrialba ocupa 9.5 litros de leche, mientras que el kilo de queso Montino ocupa 9 litros de leche. El kilo de queso Turrialba se vende en ₡1400 y el kilo de queso Montino se vende en ₡1500. Para la pasteurización se ha determinado que por cada litro se requieren de 45 segundos de mano de obra, el envase de un litro de leche entera se vende en ₡900 y la leche descremada se vende en ₡985 el envase. La empresa tiene 5 trabajadores que laboran 8 horas diarias, 6 días a la semana y disponen de 12 000 litros de leche semanales. Determine la mezcla de producción que maximiza las utilidades si se deben de fabricar como mínimo 20.5 kilos, 33.7 kilos de quesos respectivamente y por lo menos 5000 cartones de leche entera.

X_1 = Kilogramos de queso Turrialba a producir

X_2 = Kilogramos de queso Montino a producir

X_3 = Envases de 1 litro de leche entera a producir

X_4 = Envases de 1 litro de leche descremada a producir

$$\text{F.O. Max } Z = 1400X_1 + 1500X_2 + 900X_3 + 985X_4$$

Sujeto a:

$$5.5X_1 + 7X_2 + 0.75X_3 + 0.75X_4 \leq 14400$$

$$9.5X_1 + 9X_2 + X_3 + X_4 \leq 12000$$

$$X_1 \geq 20.5$$

$$X_2 \geq 33.7$$

$$X_3 \geq 5000$$

$$X_i \geq 0$$

X_3 y X_4 , enteros

Ejercicio de Programación Entera Binaria

Se tienen seis proyectos a realizar en el próximo semestre, así que ya se debe de estar preparando al personal para el inicio de las obras, los datos económicos de cada proyecto son:

Proyectos	Camino	Supermercado	Casas	Departamentos	Parques	Puentes
Ganancia	\$50,000	\$60,000	\$70 mil	\$80,000	\$90,000	\$50,000

El camino se hace para que se pueda hacer el supermercado. Si el supermercado no se hace el camino podría hacerse para beneficiar las casas aledañas. De los proyectos Camino y Departamentos se debe elegir uno como máximo, el proyecto Casas podría hacerse si es que se hace el proyecto Departamentos y/o el proyecto Parques, de los seis proyectos se debe elegir cuatro proyectos. Finalmente, el proyecto Departamentos se puede hacer sí es que se hace el proyecto Casas y no el proyecto Puentes.

X1 = Realizar el proyecto del Camino

X2 = Realizar el proyecto del Súper Mercado

X3 = Realizar el proyecto de las casas

X4 = Realizar el proyecto de los departamentos

X5 = Realizar el proyecto de los parques

X6 = Realizar el proyecto de los puentes

$$FO \text{ Max } Z = 50000X1 + 60000X2 + 70000X3 + 80000X4 + 90000X5 + 50000X6$$

Sujeto a:

$$X1 \geq X2$$

$$X1 + X4 \leq 1$$

$$X3 \leq X4 + X5$$

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 = 4$$

$$2X4 \leq X3 + 1 - X6$$

$$X_i \geq 0$$

X_i , binarias

Agregar restricción

Referencia de celda

Restricción:

Aceptar

Cancelar

< =

< =

=

> =

int

bin

dif

Observe que para resolver problemas de programación entera binaria sólo debe de indicar que los coeficientes de la F.O. son binarios marcando bin.