EAN Escuela de **Administración de Negocios**

Cadenas de Markov

La Matriz Inversa, la matriz fundamental y los estados absorventes

Tiempo de retorno medio

Cadenas de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico que presenta las siguientes propiedades:

i. Es un proceso en tiempo discreto.

ii. El espacio de estados es discreto.

iii. Dependencia markoviana.

iv. Las probabilidades de transición no dependen de la etapa.

Elementos de una cadena de Markov

Espacio de estados: $E = \left\{ E_1, E_2, \ldots, E_s \right\}$

Matriz de transición: $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix}$

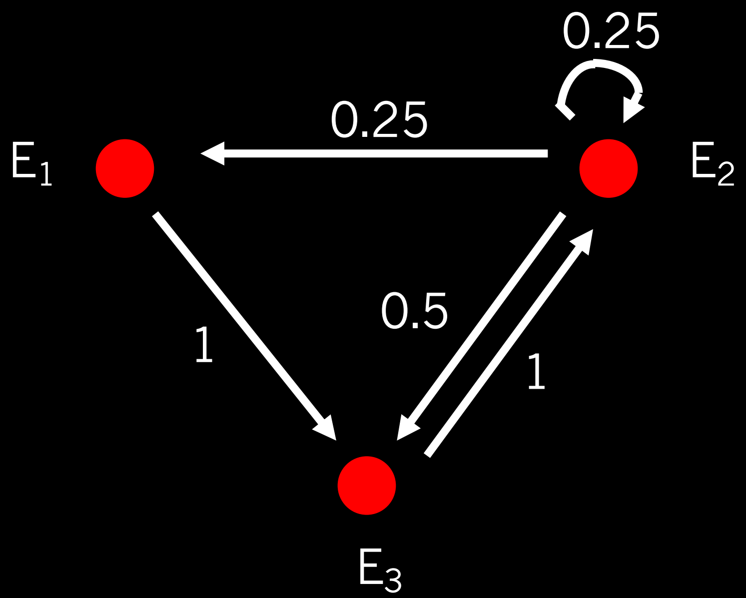
Distribución inicial: $P^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_s^{(0)} \right)$

siendo $p_{ij} = P\left(X_{t+1} = E_j \big/ X_t = E_i \right)$

siendo $p_i^{(0)} = P\left(X_0 = E_i \right)$

Representación de una cadena de Markov

Ejemplo $E = \left\{ E_1, E_2, E_3 \right\}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Distribución de probabilidad en la etapa t.

Por la ley de probabilidades totales, la distribución de probabilidad en la primera etapa se puede obtener así

$$\boldsymbol{P^1 = P^0 \times P}$$

Pero esto nos permite pasar también a la segunda etapa, y así sucesivamente a cualquier etapa, multiplicando por la matriz de transición tantas veces como etapas haya que recorrer.

$$\boldsymbol{P^t = P^0 \times P^t}$$

Tipos de estados

Efímero. Ningún estado conduce a él.

Transitorio. Tras pasar por él, al cabo de cierto número de etapas, la cadena de Markov ya no regresa a él.

Recurrente. Si no es transitorio, esto es, si tras pasar por él, la cadena de Markov siempre regresa a él.

Absorbente. Al llegar a él, ya no se sale a ningún otro estado.

Análisis de los Estados Absorbentes

Una cadena de Markov puede tener más de un estado absorbente. Por ejemplo, un empleado puede permanecer con la misma empresa hasta su retiro o renunciar antes (dos estados absorbentes). En estos tipos de cadenas, nos interesa determinar la probabilidad de llegar a la absorción y el número esperado de transiciones para llegar a ella, dado que el sistema se inicia en un estado transitorio específico.

Matriz Fundamental

El cálculo de las probabilidades de estado absorbente requiere la determinación y uso de la matriz fundamental.

Esta se deriva de la matriz de probabilidades de transición y es relativamente fácil de calcular para los procesos de Markov.

Cadena de Markov y la Matriz Fundamental

Antes de realizar la aplicación de la Cadena de Markov y la Matriz Fundamental, se determina primero lo siguiente:

1. La Matriz con probabilidades.
2. Determinar los Estados de las Probabilidades.
3. Dividir la Matriz en 4 partes.
4. Hacer el cálculo

La Cadena de Markov con Estados Absorventes

El análisis de las cadenas de Markov con estados absorbentes puede realizarse de forma conveniente con matrices. En primer lugar, la cadena de Markov se parte como sigue:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \right)$$

La disposición requiere que todos los estados absorbentes ocupen el primer cuadrante de la nueva matriz.

La Cadena de Markov con Estados Absorventes

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline A & B \end{array}\right)$$

En el segundo cuadrante nos queda una matriz nula y en el primer cuadrante nos queda una matriz identidad, de tal forma que la probabilidad de absorción estará dada por:

$$P = (I - B)^{-1} A$$

Ejercicio

Baje de la página www.ucrenop.com el archivo de excel con el nombre: Sesión 13 ejercicios análsis de markov 2.

Una entidad financiera desea que sus clientes actuales posean más de una tarjeta de crédito de un mismo banco y con ello fortalecer su relación con los clientes.

Para determinar tal aceptación, se tomó en cuenta el historial de cada cliente con sus respectivas probabilidades, determinando los siguientes estados:

Estados

Estado 1: Cliente acepto la tarjeta de crédito y la activó para utilzarla.

Estado 2: Cliente no acepto la tarjeta y no la activo.

Estado 3: Cliente acepto la tarjeta y no la activo

Estado 4: Cliente no fue contactado por ningún medio para ofrecerle la tarjeta.

¿Qué probabilidad existe que el estado 3 y 4 sean absorbidos? ¿Cuál es la probabilidad de que el estado 3 y 4 no sean absorbidos?

Los datos históricos se resumen:

Estados	E1	E2	E3	E4
Aceptó y activo tarjeta	1	0	0	0
No aceptó ni activo tarjeta	0	1	0	0
Acepto la tarjeta pero No la activo	0.2	0.1	0.4	0.3
No fue contactado por el banco	0.2	0.2	0.1	0.5

Los pasamos a una matriz 4 x 4.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{Estado 1} & \text{Estado 2} & \text{Estado 3} & \text{Estado 4} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Estado 1} \\ \text{Estado 2} \\ \text{Estado 3} \\ \text{Estado 4} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Dividimos la Matriz en cuatro

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{array}\right)$$

Dividimos la Matriz en cuatro

$$\begin{array}{cc} \quad\quad I & \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \quad\quad A & \quad\quad\quad\quad B \end{array}$$

I= Matriz Identidad
0= Matriz nula (compuesta únicamente por 0)

Restamos la matriz I menos la matriz B

$$F=(I - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$F=(I - B) = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos

Encontramos la determinante

$$d = (0.6 \times 0.5) - (-0.3 \times -0,1)$$

$$d = 0.27$$

Aplicamos la Matriz Inversa

$$F=(I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos Posiciones

$$F=(I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Negativos pasan a positivos

$$F=(I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5/0.27 & 0.3/0.27 \\ 0.1/0.27 & 0.6/0.27 \end{pmatrix}$$

Dividimos la matriz por el determinante

$$F=(I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.85 & 1.11 \\ 0.37 & 2.22 \end{pmatrix}$$

Se obtiene la Matriz Fundamental

Multiplicamos la Matriz Fundamental por la Matriz A

$$F \times A = \begin{pmatrix} 1.85 & 1.11 \\ 0.37 & 2.22 \end{pmatrix} \text{X} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$FA = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.41 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

La nueva matriz FA tiene un significado importante, indica la probabilidad de que una cantidad en uno de los estados no absorbentes termine en uno de los estados absorbentes.

Conclusión

$$FA = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.41 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

La probabilidad de que el cliente termine activando la tarjeta es del 59%
Y de que termine sin activar la tarjeta es del 41%. La probabilidad de que
el cliente que no había sido contactado por el banco termine activando una
tarjeta es del 52% y de que no sea absorbido, es decir que el cliente no
active ninguna tarjeta es del 48%.

Ejercicio

¿Si tenemos 300 clientes que han retirado sus tarjetas pero no las han activado y 200 clientes que nunca han sido contactados por el banco, cuántos clientes esperamos que terminen activando una tarjeta del banco y cuántos se espera que no lo hagan?

Matriz M

La matriz M representa los clientes en los estados absorbentes, es decir, clientes que activaron su tarjeta o clientes que nunca lo harán.

$$M = \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix}$$

Matriz M

$$(300\ 200)\begin{pmatrix} 0.59 & 0.41 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} = (281\ \ 219)$$

R/ Se espera que 281 terminen activando alguna tarjeta de crédito del banco y 219 no lo hagan.

Tiempo Medio de Recurrencia

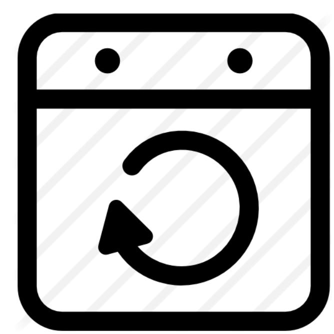
Tiempo de Retorno Medio

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez.

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, j = 1, 2, \ldots, n$$

Tiempo Medios de Recurrencia

Las probabilidades estacionarias de una cadena finita, irreducible y aperiódica (formada por estados recurrentes positivos) están relacionadas con los tiempos medios de recurrencia de los estados.



Tiempo Medios de Recurrencia

Sea $\{X_n\}$ una cadena finita, irreducible y aperiódica, entonces, $\forall_j \in E$ el tiempo medio de recurrencia al estado j, μ_j , se relaciona con π_j así:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} T_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}.$$

Tiempo Medios de Recurrencia

Esto indica que cuanto mayor es el tiempo medio de recurrencia del estado j, menor es la probabilidad de que nos encontremos en ese estado j, cuando pase un tiempo suficientemente grande.

Tiempo Medios de Recurrencia

Por otro lado, μ_j se puede calcular como:

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}$$

En el caso de que se tenga una cadena de Markov no finita, aperiódica e irreducible se cumple el teorema anterior, aunque se requiere que todos sus estados sean recurrentes positivos.

Ejercicio

En un día soleado, Minigolf puede tener ingresos de $2000. Si el día está nublado, los ingresos se reducen 20%. Un día lluvioso reducirá los ingresos en 80%. Si hoy está soleado hay 80% de probabilidades de que mañana esté soleado sin amenaza de lluvia. Si está nublado, hay 20% de probabilidades de que mañana llueva, y 30% de probabilidades de que esté soleado. Seguirá lloviendo hasta el día siguiente con una probabilidad de 0.8 pero con 10% de probabilidades de que esté soleado.

a) Determine los ingresos diarios esperados para la empresa.

b) Determine cada cuantos días ocurren los días soleados.

Primero debemos calcular las probabilidades del estado estable para poder determinar cada cuantos días ocurren los días soleados.