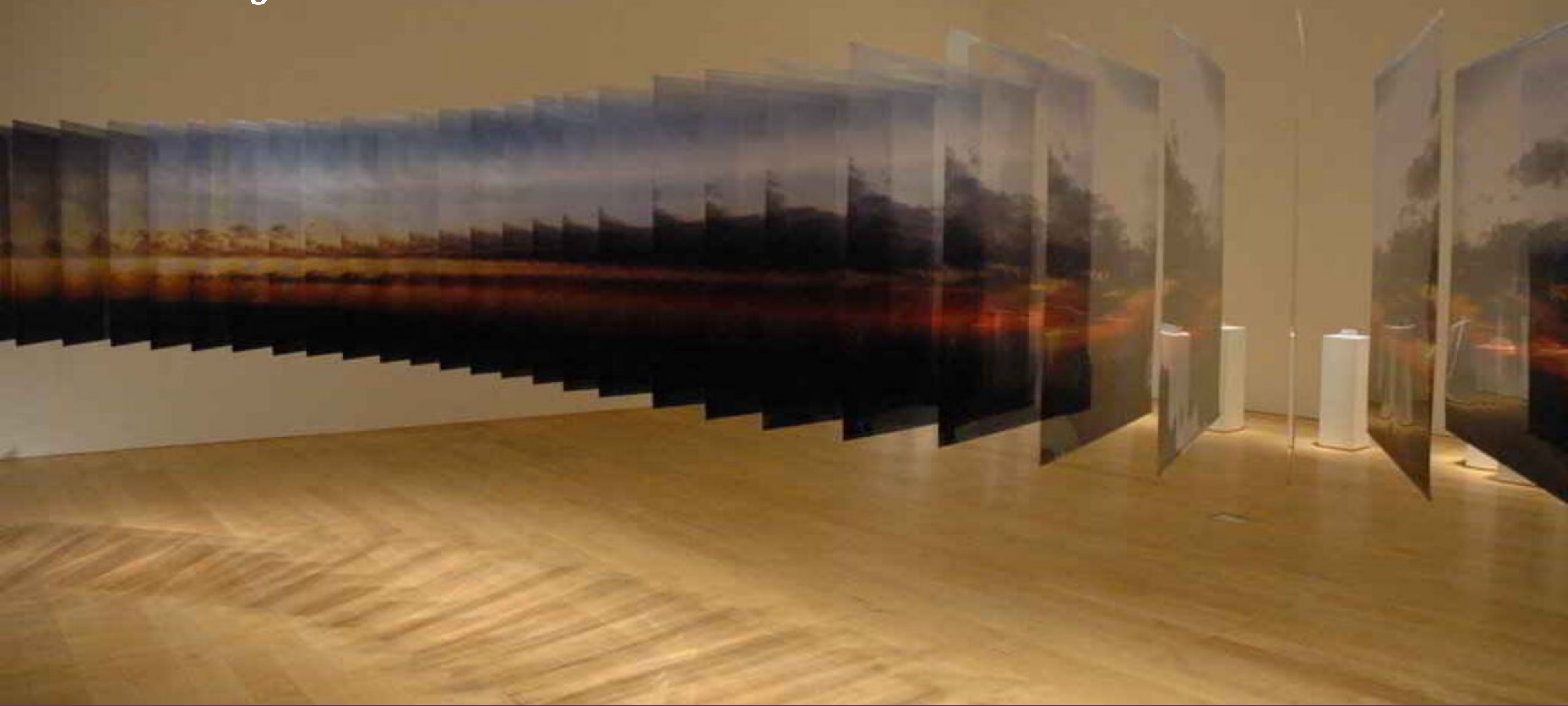
EAN Escuela de Administración de Negocios



Cadenas de Markov

Matrices y Determinantes

Matrices y Determinantes

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Matriz

Es una tabla rectangular de n números reales dispuestos en filas y columnas.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz A}} \left.\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right\} \text{Filas de la matriz A}$$

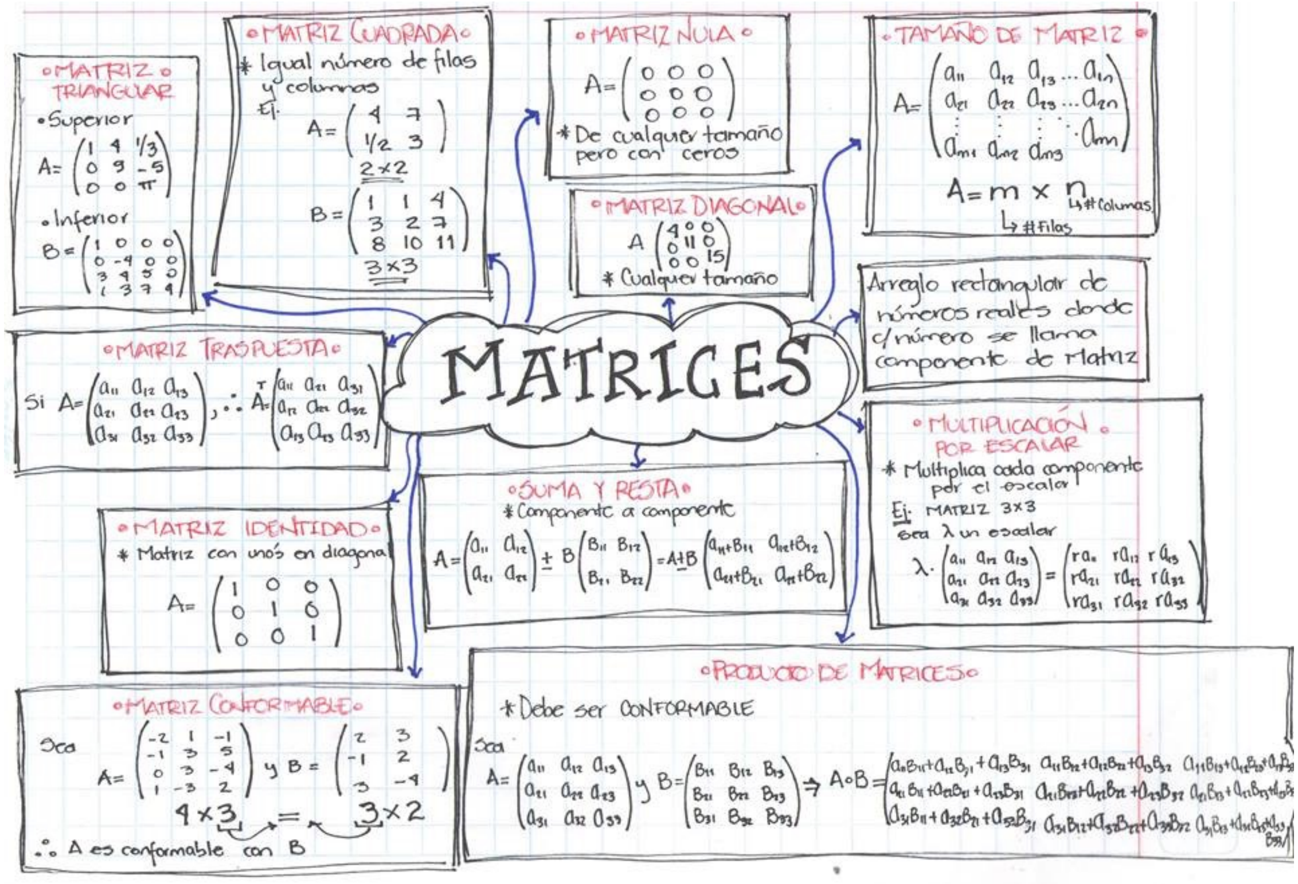
$$\mathbf{A = (a_{ij})}$$

Cada elemento de la matriz lleva dos subíndices, el primero de ellos "i", indica la fila en la que se encuentra el elemento, y el segundo, "j", la columna.

Ejercicio

C tiene 4 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 4 x 3. ¿Qué elemento es c42?.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



TIPOS DE MATRICES

Matriz Nula

Se llama matriz nula a la que tiene todos los elementos cero.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Fila

Se llama matriz fila a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es 1 x n.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz Columna

Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será m x 1.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada

Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es n x n.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

De órden 3.
Diagonal principal 1, 5, 0

Se llama traza de la matriz a la suma de los elementos de la diagonal, en este caso, Traza (D) = 1+5+0=6

Matrices Triangulares

Una matriz es triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y triangular inferior si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

$$E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix}}_{\text{Triangular inferior}} \quad F = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}}_{\text{Triangular superior}}$$

Matriz Diagonal

Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal. Una matriz de este tipo se denomina matriz diagonal.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad

Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina matriz unidad o identidad.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo: Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0'04	0'08	0'12
Color F	0'03	0'05	0'08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

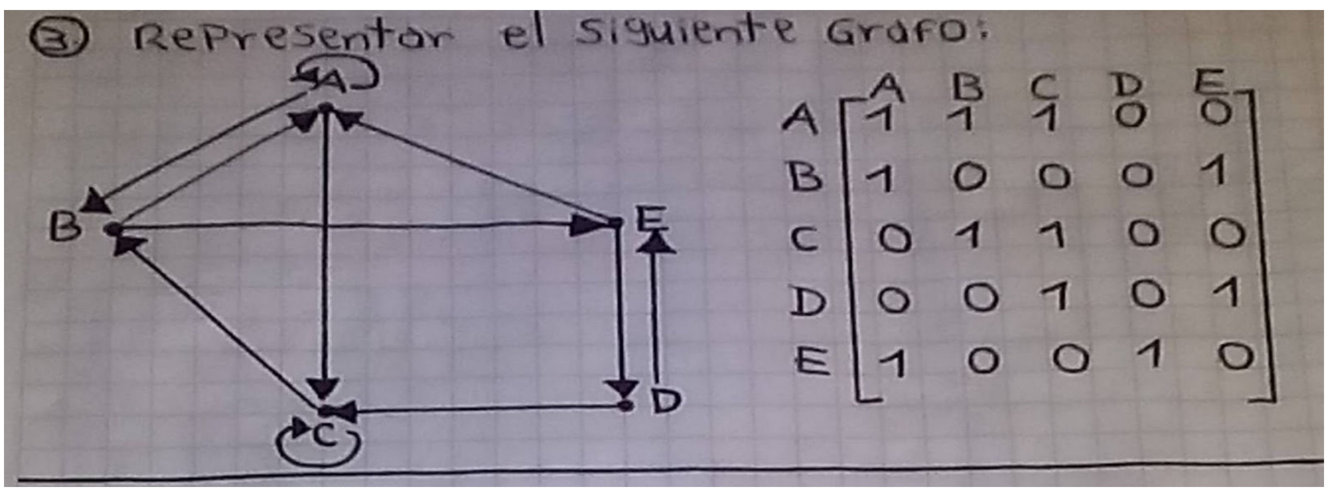
La Matrices serían:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 2\text{ ud} & 5\text{ ud} & 10\text{ ud} \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{N} \\ \text{F} \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{N} & \text{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'04 & 0'03 \\ 0'08 & 0'05 \\ 0'12 & 0'08 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2\text{ ud} \\ 5\text{ ud} \\ 10\text{ ud} \end{array} \end{array}$$

Se conocen como *matrices de información*

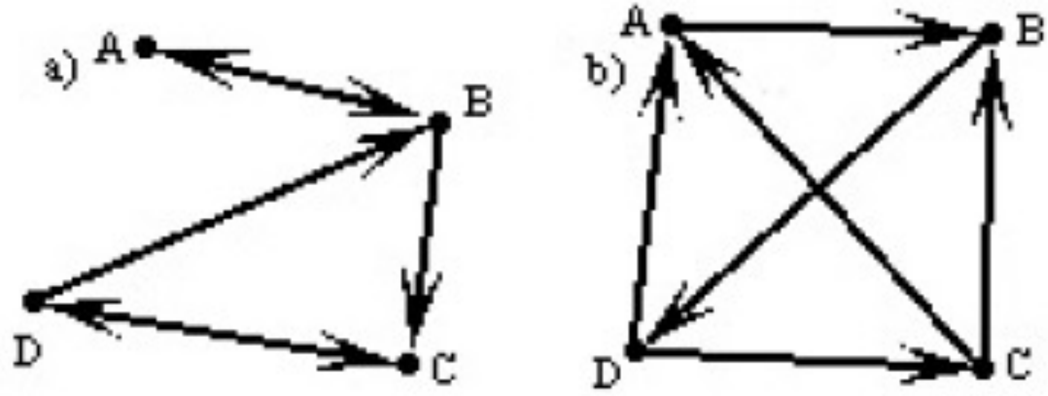
Matriz de Relación

Indican si ciertos elementos están o no relacionados entre sí. En general, la existencia de relación se expresa con un 1 en la matriz y la ausencia de dicha relación se expresa con un 0. Estas matrices se utilizan cuando queremos trasladar la información dada por un grafo y expresarla numéricamente.



Ejercicio

1) Escribe las correspondientes matrices de adyacencia de los grafos:



2) Dibuja los grafos dirigidos que correspondan a las matrices de adyacencia:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Operaciones con Matrices

Suma y Resta

Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla.

Para sumar o restar dos matrices del mismo tamaño, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño.

$$\underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = ?$$

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Si las matrices tienen diferente tamaño NO se pueden sumar o restar

Propiedades de la suma y resta de matrices

a) Conmutativa: $A + B = B + A$

b) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) Elemento neutro: *la matriz nula del tamaño correspondiente.*

d) Elemento opuesto de A: *La matriz –A, que resulta de cambiar de signos los elementos de A.*

Ejercicio

Las exportaciones, en millones de euros, de 3 países A, B, C a otros tres X, Y, Z, en los años 2000 y 2001 vienen dadas por las matrices:

$$A_{2000} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 6'7 & 0'5 \\ 14'5 & 10 & 1'2 \\ 20'9 & 3'2 & 2'3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_{2001} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13'3 & 7 & 1 \\ 15'7 & 11'1 & 3'2 \\ 21 & 0'2 & 4'3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Calcule en forma de matriz el total de exportaciones para los dos años.
2) ¿Cúantos millones ha exportado del país B al Z?
3) Calcule el incremento de las exportaciones del año 2000 al 2001.

Producto por un número real

Dada una matriz cualquiera A y un número real k, el producto k·A se realiza multiplicando todo los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual tamaño. (Evidentemente la misma regla sirve para dividir una matriz por un número real).

$$-5 \cdot \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \ ?$$

$$-5 \cdot \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} -10 & -5 & -15 \\ 20 & -10 & -5 \end{pmatrix}}$$

Propiedades

a) Distributiva respecto de la suma de matrices: $k*(A + B)=k*A + k*B$

b) Distributiva respecto de la suma de números: $(k+d)*A=k*A + d*A$

c) Asociativa: $k*(d*A) = (k*d)*A$

d) Elemento neutro, el número 1: $1*A = A$

Trasposición de Matrices

Dada una matriz cualquiera A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál sería la matriz A^t ?

Trasposición de Matrices

Dada una matriz cualquiera A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Trasposición de Matrices

Evidentemente, si A es una matriz de tamaño m x n, su traspuesta A^t tendrá tamaño n x m, pues el número de columnas pasa a ser el de filas y viceversa.

Si la matriz A es cuadrada, su traspuesta tendrá el mismo tamaño.

Propiedades

a) $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(k*A)^t = k*A^t$

Matriz Simétrica

Es aquella para la que se cumple que $A^t = A$.

En una matriz simétrica, los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

¿Es simétrica? Compruébelo

Matriz Antisimétrica

Es aquella para la que se cumple que $A^t = -A$

En una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal son siempre nulos y los restantes son opuestos respecto a dicha diagonal.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

¿Es antisimétrica? Compruébelo

Ejercicio

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

calcula $3A^t - B^t$

Producto de Matrices

Hay que dejar claro ya desde el principio que no todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

"Para multiplicar dos matrices A y B, en este orden, A·B , es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B"

Si no se cumple esta condición, el producto A·B no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación.

Una vez comprobado que el producto A·B se puede realizar, si A es una matriz m x n y B es una matriz n x p (observemos que el número de columnas de A = n, es igual al número de filas de B), entonces el producto A·B da como resultado una matriz C de tamaño m x p.

Tenemos 4 columnas en la primera matriz y 4 filas en la segunda matriz es decir m x **n** y la otra **n** x p

$$A = \underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \quad \text{X} \quad B = \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

El resultado será una matriz:
(**m**xn) x (nx**p**) = (mxp)

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}}$$

$$(-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 0 + 2 + 2 + 12 = 16$$

$$(-3) \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 12 - 4 + 0 + 8 = 16$$

$$(-3) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -3 + 2 + 2 + 4 = 5$$

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4x3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 \\ & & \end{pmatrix}}$$

Calcule la segunda fila de la matriz

$$\underset{2\text{x}4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\text{x}3}{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\text{x}3}{\begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 \\ 5 & -22 & 11 \end{pmatrix}}$$

2x3

Ejercicios:

1. Para las matrices A y B anteriores, calcula B·A

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula si es posible A·B y B·A. ¿Coinciden?.

3. Lo mismo si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Calcula todos los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Además, calcula A^2 y A^3.

5. Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   calcula:

$$A + B, 3A - 4B, A \cdot B, A \cdot D, B \cdot C, C \cdot D, A^t \cdot C, D^t \cdot A^t, B^t \cdot A, D^t \cdot D, D \cdot D^t$$

Propiedades del producto de matrices

a) Asociativa: A*(B*C) = (A*B)*C

b) Distributiva respecto de la suma: A* (B+C)=A*B + A*C

   (B+C)*A= B*A + C*A

c) Elemento neutro, la matriz identidad correspondiente, si A es m x n:

   $A*I_n = A$

   $I_m*A = A$

d) En general el producto de matrices no es conmutativo: A*B ≠ B*A

e) El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula:

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3x1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}} = \underset{2x1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicios:

1. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿son ciertas las propiedades siguientes, que son ciertas para las operaciones con números reales?:

   a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$

   b) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$

   c) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$

2. Determina los valores de a y b de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ para que $A^2 = A$.

3. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?.

Determinantes

Si es una matriz 2 x 2 se define el determinante de la matriz A, y se expresa como det(A) o bien|A|, como el número:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinantes

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = ?$ b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = ?$

Determinantes

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ =1·4-(-1)·3=4+3=7.

b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ =-10+6=-4.

Matriz Adjunta

Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el menor complementario de un elemento de A,a_{ij} , como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz Adj

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Menor complementario de -2: $M_{11} =$

Menor complementario de 4: $M_{12} =$

Menor complementario de 5: $M_{13} =$

Calcule los restantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Menor complementario de -2: $M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ =14-0=14.

Menor complementario de 4: $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ =12+9=21.

Menor complementario de 5: $M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ =0-21=-21.

Calcule los restantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Adjunta

Estrechamente ligado al concepto de menor complementario se encuentra el de adjunto de una matriz. Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el adjunto de un elemento a_{ij} de A como el número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Menor complementario de -2:$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$=14-0=14.

Menor complementario de 4:$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$=12+9=21.

Menor complementario de 5:$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$=0-21=-21.

Adjunto de -2:$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 14 = 14$
Adjunto de 4:$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 21 = -21$
Adjunto de 5:$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot -21 = -21$

Regla Gráfica

Donde + significa que el adjunto coincide con el menor complementario y el – que tiene signo contrario

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

La Regla de Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sumandos Positivos

1. Los elementos diagonal principal: a11*a22*a33
2. Los elementos de la linea paralela superior a la diagonal principal por el elemento aisalado de la esquina inferior izquierda: a12*a23*a31
3. Los elementos de la linea paralela inferior a la diagonal principal por el elemento aisalado de la esquina superior derecha: a21*a32*a13

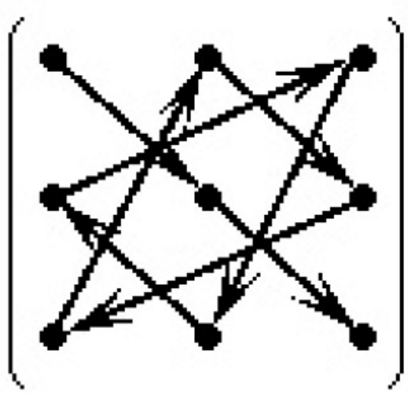
Sumandos Negativos

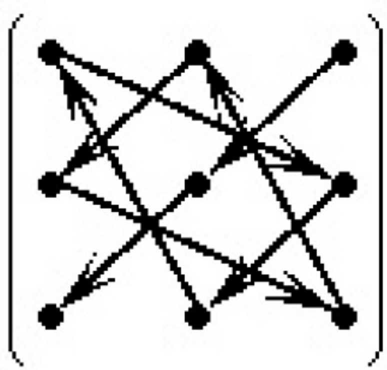
1. Los elementos diagonal secundaria: a13*a22*a31
2. Los elementos de la linea paralela superior a la diagonal secundaria por el elemento aisalado de la esquina inferior derecha: a12*a21*a33
3. Los elementos de la linea paralela inferior a la diagonal secundaria por el elemento aisalado de la esquina superior izquierda: a32*a23*a11

La determinante será: Sumandos positivos – Sumandos negativos

det(A) = Sumandos positivos – Sumando negativos
Resuelva con la regla de Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$





Sumandos positivos

Sumandos negativos

det(A) = Sumandos positivos – Sumando negativos

Resuelva con la regla de Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=(-2)\cdot 7\cdot 2+4\cdot 3\cdot(-3)+6\cdot 5\cdot 0-(3\cdot 7\cdot 5+0\cdot(-2)\cdot(-3)+6\cdot 4\cdot 2)=-28-36-105-48=-217.$$

La Matriz Inversa

Sabemos ya multiplicar matrices y hemos visto algunas de las propiedades de esta operación.

Recordemos, en primer lugar, que no siempre es posible efectúar la multiplicación de dos matrices y en segundo lugar, que aunque sea posible hacer esta multiplicación, en general no es conmutativo, es decir A·B es distinto de B·A.

En el caso particular de que tratemos con matrices cuadradas del mismo orden A y B, es claro que podemos efectuar los productos A·B y B·A, que darán como resultado otra matriz del mismo orden, aunque, como ya se ha dicho, las matrices resultantes serán, en general, distintas.

La Matriz Inversa

Dada una matriz cuadrada de orden n, A, se dice que A es invertible (o que posee inversa o que es no singular o que es regular), si existe otra matriz del mismo orden, denominada matriz inversa de A y representada por A^{-1} y tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es singular o NO invertible
Si una matriz tiene inversa, dicha matriz inversa es única (sólo hay una).

La Matriz Inversa

Determinante, traspuesta y matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \mathrm{Adj}\,(A^t)$$

La Matriz Inversa

Determinante, traspuesta y matriz adjunta

Baje el archivo de excel con el nombre:Sesión 09 ejercicio de análisis de markov 1.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj}\,(A^{t})$$

Calcule la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$