EAN Escuela de Administración de Negocios

Simulación Teoría de Colas

Queuing Simulator

Origen

El origen de la teoría de colas está en el esfuerzo de Agner Kraup Erlang (Dinamarca, 1878 - 1929) en 1909 para analizar la congestión de tráfico telefónico con el objetivo de cumplir la demanda incierta de servicios en el sistema telefónico de Copenhague. Sus investigaciones acabaron en una nueva teoría denominada teoría de colas o de líneas de espera.

Tiempo entre Llegadas

Tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas como tiempo entre llegadas.

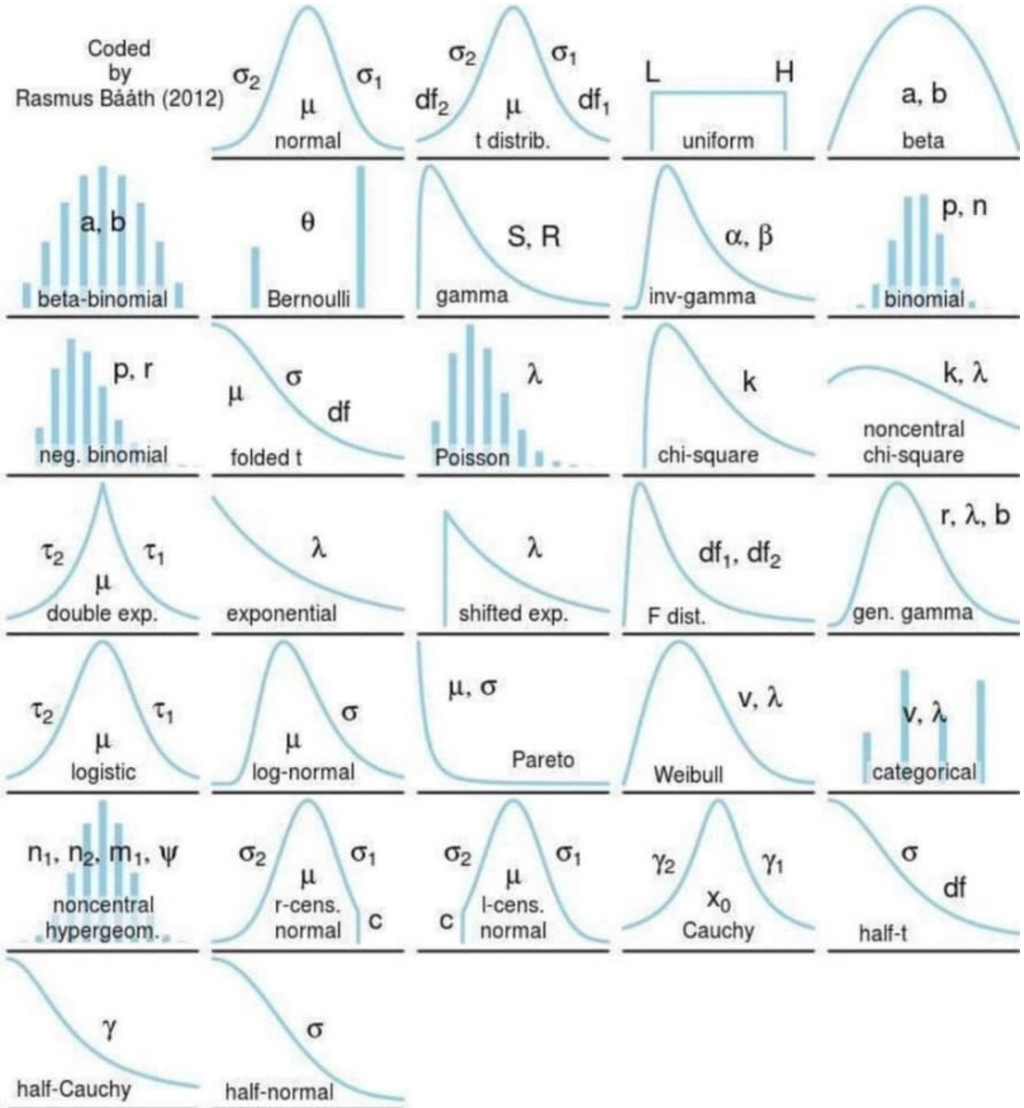
Determinístico, en el cual clientes sucesivos llegan en un mismo intervalo de tiempo, fijo y conocido. Probabilístico, en el cual el tiempo entre llegadas sucesivas es incierto y variable. Los tiempos entre llegadas probabilístico se describen mediante una distribución de probabilidad.

Tiempo de servicio

El tiempo que transcurre desde el inicio del servicio para un cliente hasta su terminación en una instalación se llama tiempo de servicio.

Con un tiempo de servicio determinístico, cada cliente requiere precisamente de la misma cantidad conocida de tiempo para ser atendido. Los tiempos de servicio probabilísticos se describen matemáticamente mediante una distribución de probabilidad.

Tipo de Distribuciones



Distribución Constante

La variable X asume un valor fijo a través del tiempo, tal es el caso del movimiento de materiales a travéz de una línea de producción automatizada.

Distribución Erlang

La distribución Erlang es una distribución continua, que tiene un valor positivo para todos los números reales mayores que cero, y está dada por dos parámetros: la forma k, que es un entero no negativo, y la tasa λ, que es un número real no negativo. La distribución a veces se definen utilizando el inverso del parámetro de tasa, la escala θ. Se utiliza la distribución Erlang para describir el tiempo de espera hasta el suceso número k en un proceso de Poisson. El parámetro de escala θ es equivalente a la media de una distribución exponencial, y el parámetro de forma k es equivalente al número de eventos distribuido exponencialmente. Cuando el parámetro de forma k es igual a 1, la distribución se reduce a la distribución exponencial.

Distribución Erlang

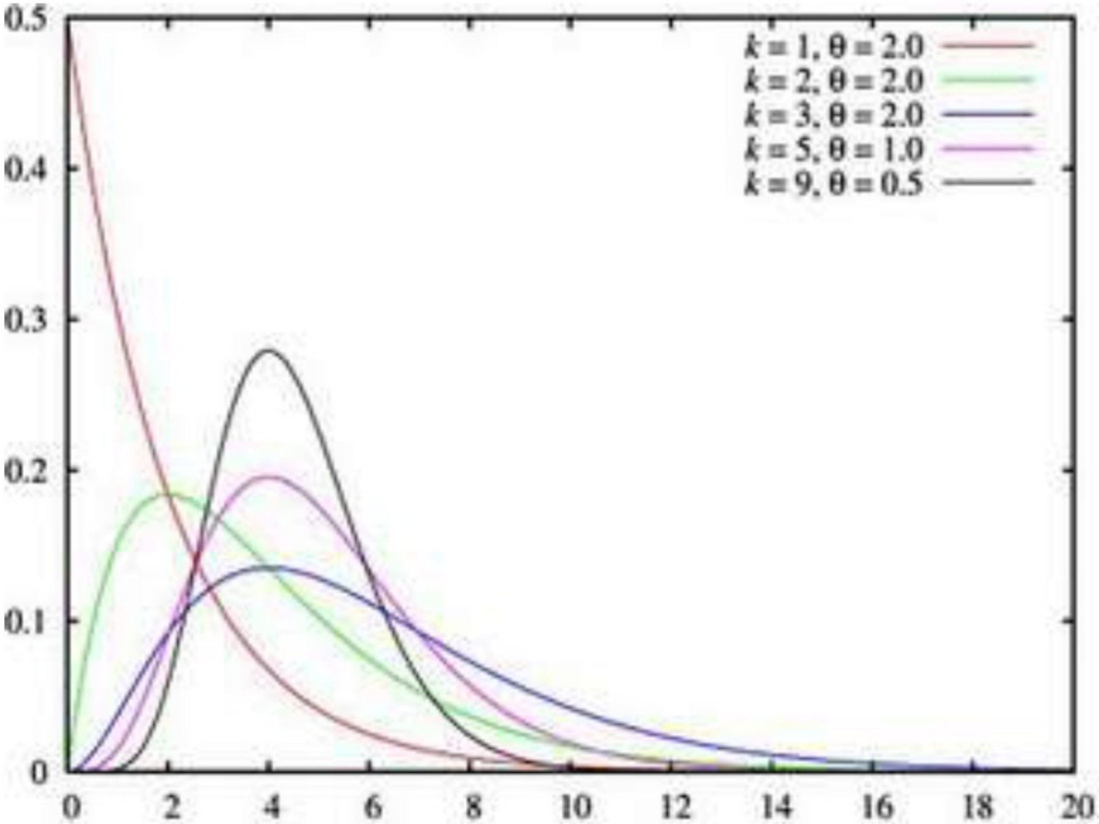


Fig.1 Función de densidad de probabilidad para la Distribución Erlang

Distribución Erlang

Parámetros	$k > 0 \in \mathbb{Z}$ $\lambda > 0$ alt.: $\theta = 1/\lambda > 0$	**Media**	k/λ
Dominio	$[0, \infty)$	**Mediana**	—
Función de densidad (pdf)	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$	**Moda**	$(k-1)/\lambda$ for $k \geq 1$
		Varianza	k/λ^2
Función de distribución (cdf)	$\frac{\gamma(k, \lambda x)}{(k-1)!} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda x}(\lambda x)^n/n!$	**Coeficiente de simetría**	$\frac{2}{\sqrt{k}}$

Distribución Exponencial

Una de las distribuciones de variable contínua más importantes es la distribución exponencial.

Se la utiliza como modelo para representar el tiempo de funcionamiento o de espera.

Tiene como función expresar también el tiempo transcurrido entre eventos que se contabilizan por medio de la distribución de Poisson.

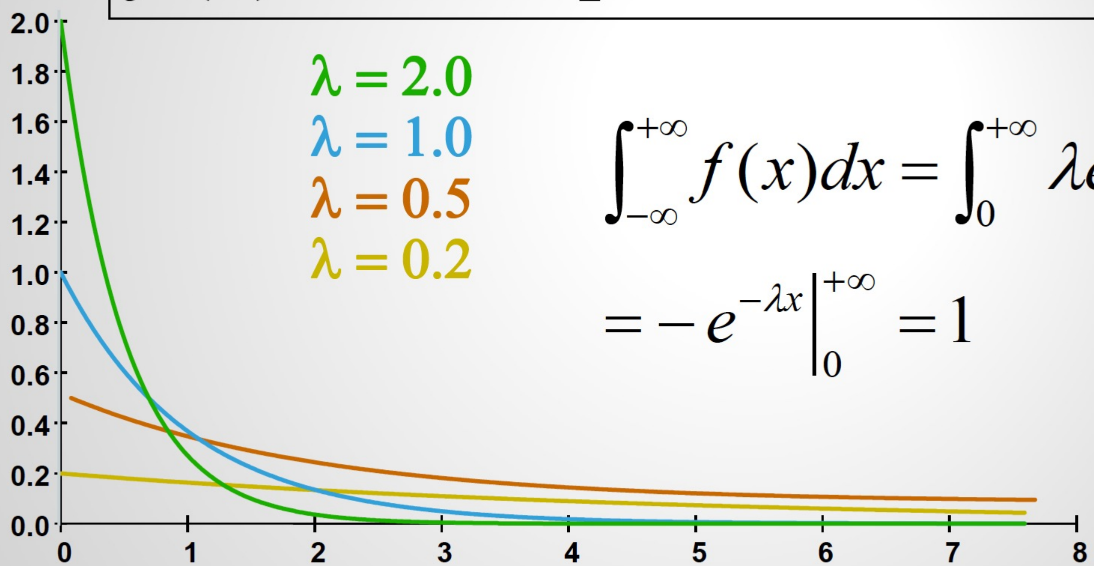
Distribución Exponencial

Sea un fenómeno aleatorio en donde X es variable aleatoria que señala el tiempo transcurrido entre dos sucesos de la misma naturaleza, ó indica el tamaño de una región del espacio.

Existe relación de éste fenómeno con el Poisson ya que los 2 sucesos mencionados en la variable exponencial son del tipo Poisson. Por lo tanto λ es el mismo parámetro en las dos distribuciones.

Distribución Exponencial

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para} \;\; x \geq 0, \;\; \lambda > 0}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

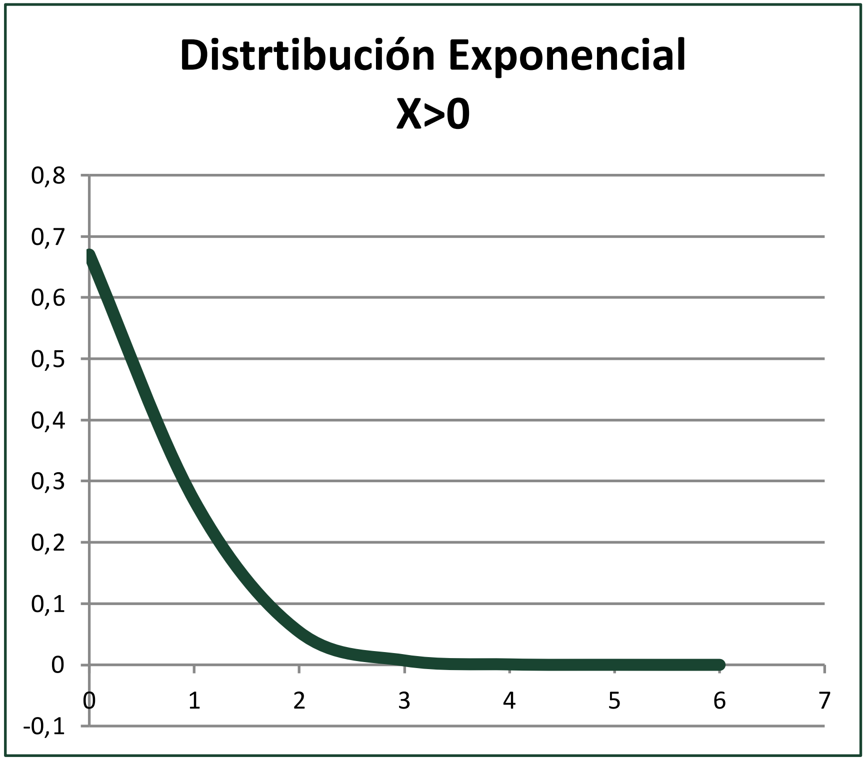
Vida media $\longrightarrow$ $\mu = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{\lambda}$

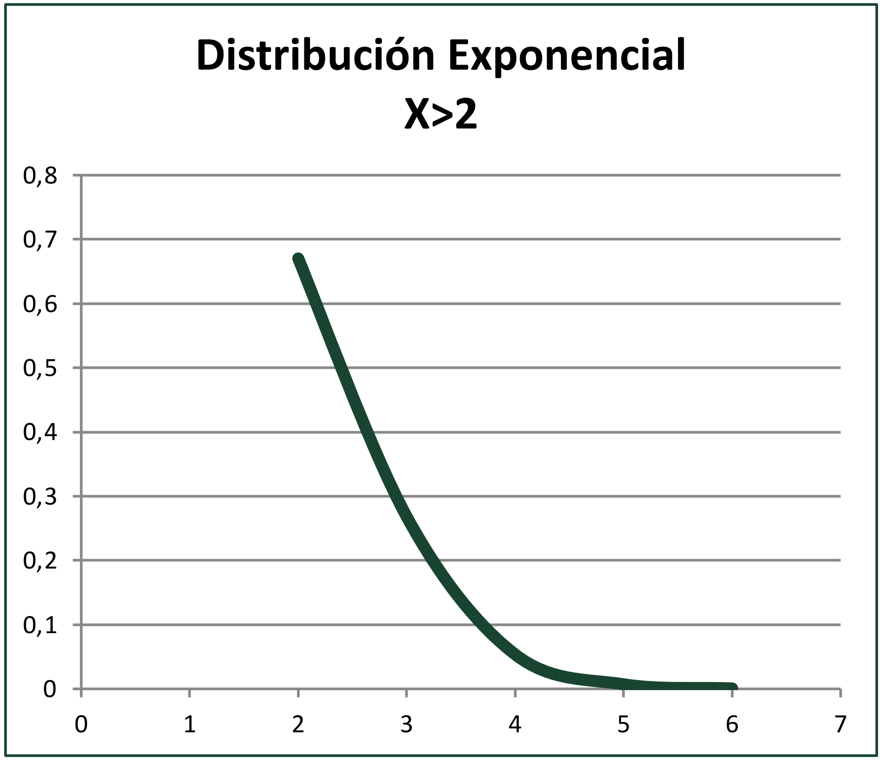
Distribución Exponencial Trasladada

Para $x > a$, la función de densidad se presenta como: $g_x(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$

Algunos autores la llaman exponencial trasladada y al igual que la exponencial, esta distribución NO tiene memoria, es decir los eventos precedentes o futuros no dependen de los ocurridos en el pasado.

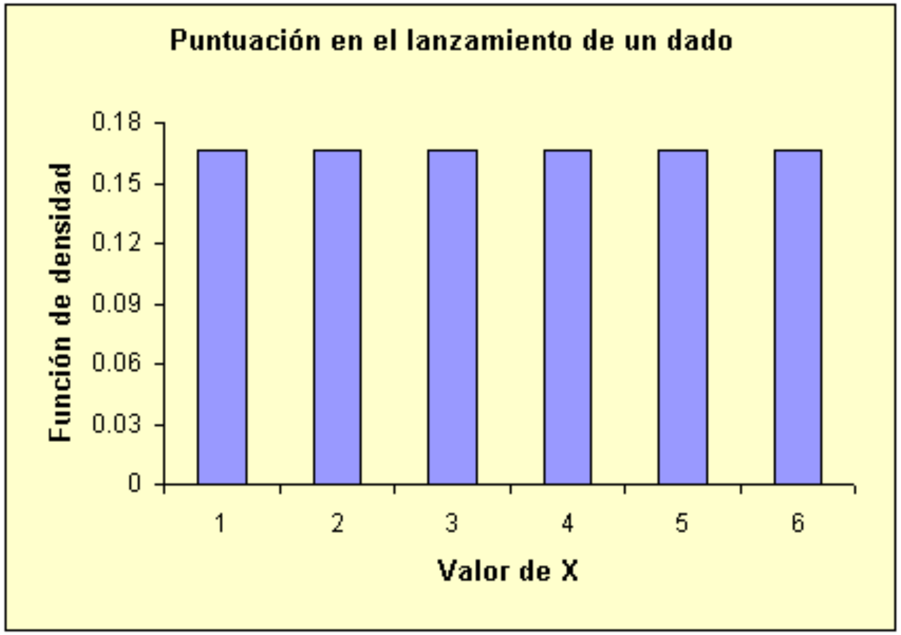
Distribución exponencial vrs distribución exponencial trasladada





Distribución Uniforme Discreta

En teoría de la probabilidad, la distribución uniforme discreta es una distribución de probabilidad que asume un número finito de valores con la misma probabilidad.



Distribución Uniforme

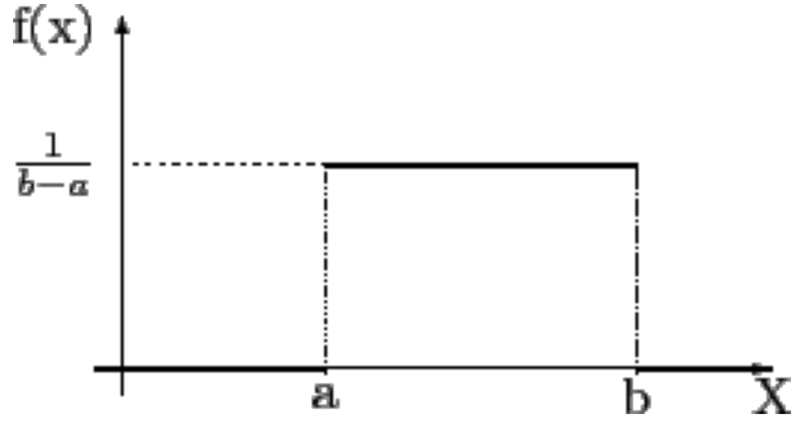
Sea X una variable uniforme que puede tomar los *n* siguientes números reales: $x_1, x_2, x_3, \ldots.., x_n$ entonces:

$$P(X=x_i) = \frac{1}{n}$$

Distribución Uniforme

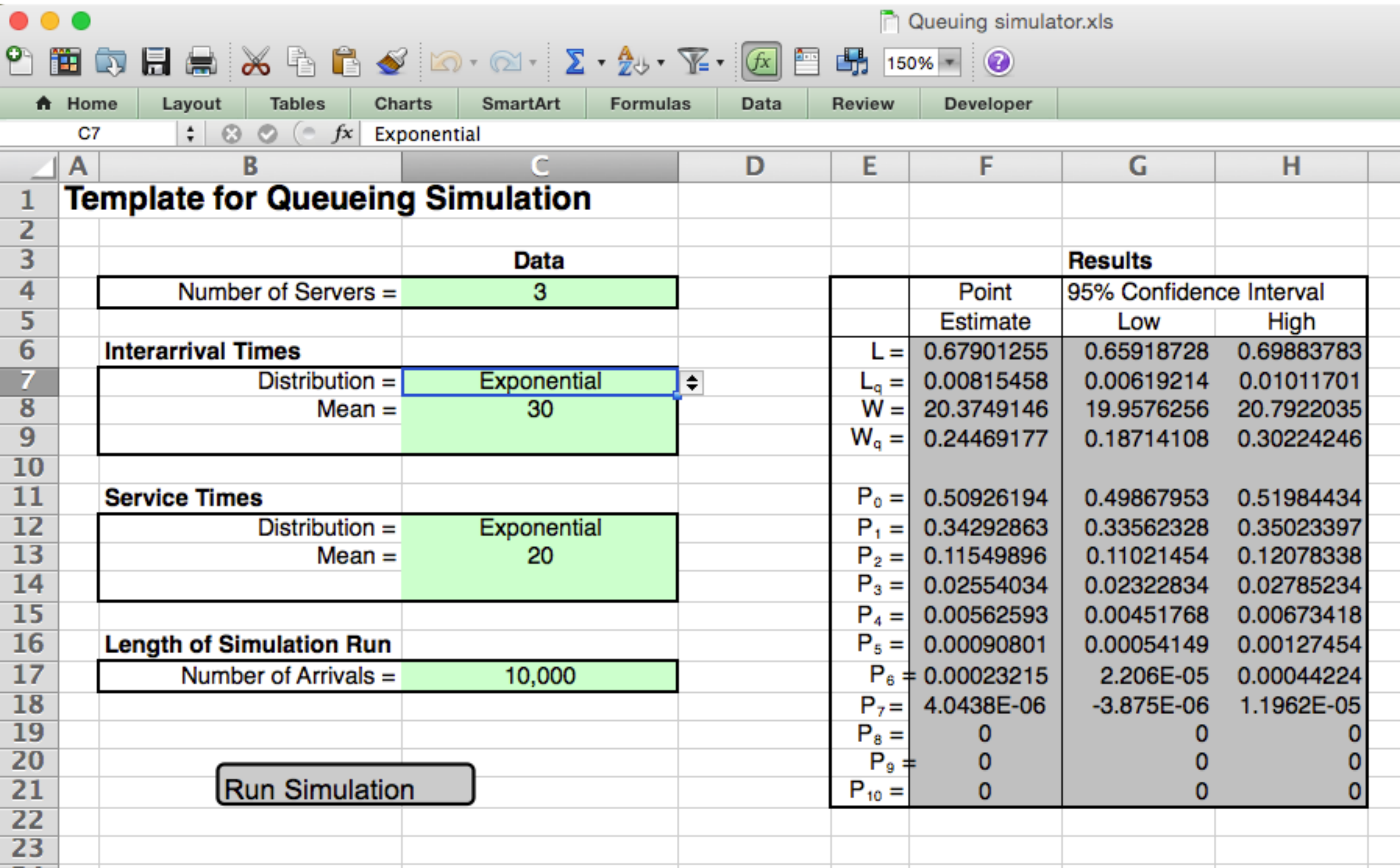
$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$$



En la página del curso en Programas de Excel busque el archivo Queuing Simulator

Queuing Simulator es una hoja de Excel programada con Macros para calcular las principales carácteristicas de los sistemas de colas con una cantidad enorme de corridas, hasta más de 10,000 lo que permite alcanzar el objetivo de la generación de número aleatorios de Monte Carlo.



Queuing simulator.xls

C7 Exponential

Template for Queueing Simulation

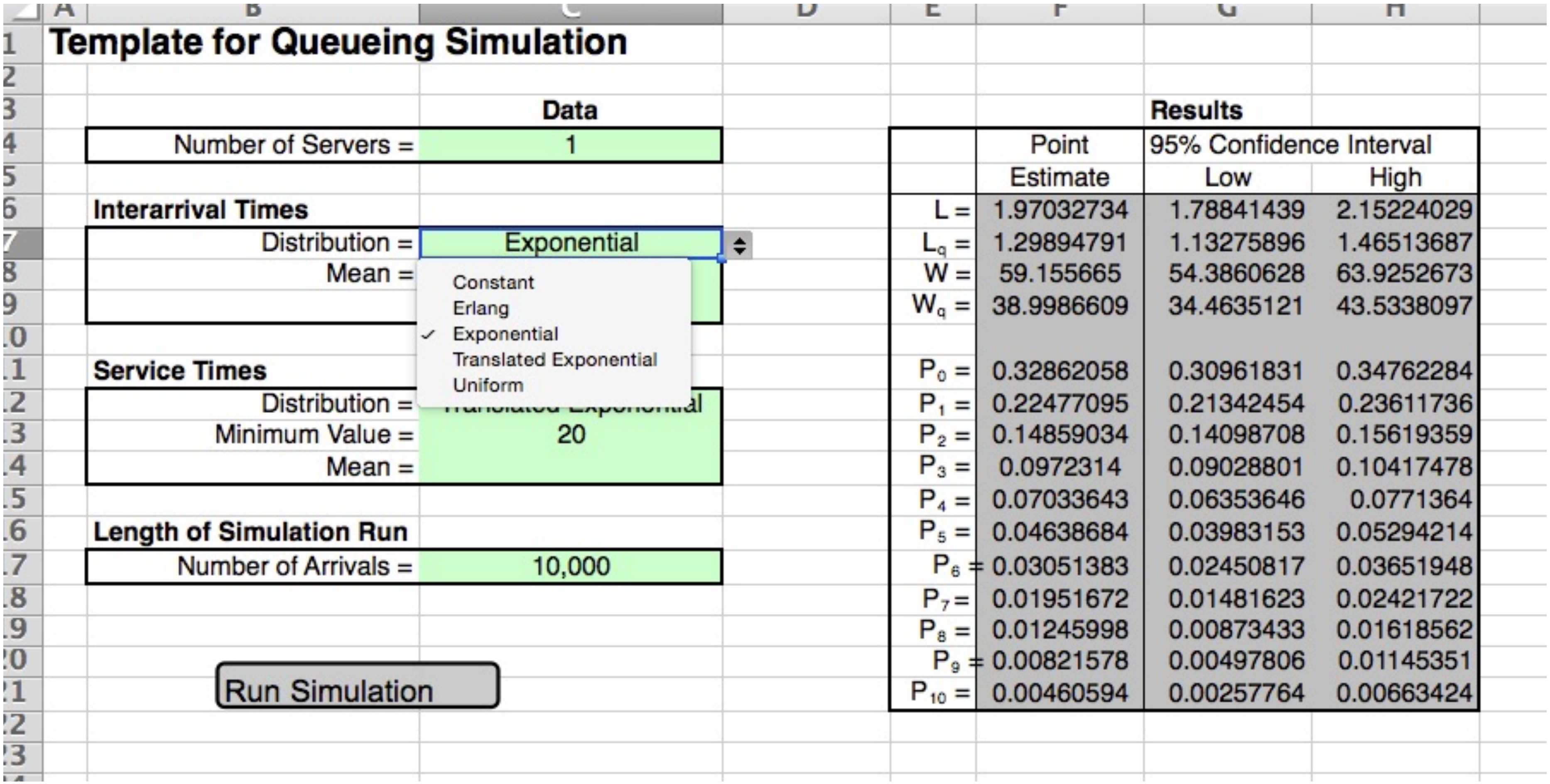
	Data
Number of Servers =	3
Interarrival Times	
Distribution =	Exponential
Mean =	30
Service Times	
Distribution =	Exponential
Mean =	20
Length of Simulation Run	
Number of Arrivals =	10,000

Run Simulation

Results

	Point	95% Confidence Interval	
	Estimate	Low	High
$L =$	0.67901255	0.65918728	0.69883783
$L_q =$	0.00815458	0.00619214	0.01011701
$W =$	20.3749146	19.9576256	20.7922035
$W_q =$	0.24469177	0.18714108	0.30224246
$P_0 =$	0.50926194	0.49867953	0.51984434
$P_1 =$	0.34292863	0.33562328	0.35023397
$P_2 =$	0.11549896	0.11021454	0.12078338
$P_3 =$	0.02554034	0.02322834	0.02785234
$P_4 =$	0.00562593	0.00451768	0.00673418
$P_5 =$	0.00090801	0.00054149	0.00127454
$P_6 =$	0.00023215	2.206E-05	0.00044224
$P_7 =$	4.0438E-06	-3.875E-06	1.1962E-05
$P_8 =$	0	0	0
$P_9 =$	0	0	0
$P_{10} =$	0	0	0

Queuing Simulator nos permite utilizar las principales distribuciones estadísitcas que normalmente pueden ocurrir en un sistema de colas tanto para las llegadas como para el servidor.



Teoría de Colas

Problema con varios servidores

Baje el archivo con el nombre: Sesión 08 ejercicio de simulación de teoría de colas 2.

Primera pregunta 40 puntos. La dirección del First Syracuse Bank está preocupada por la pérdida de clientes de su oficina principal en el centro de la ciudad. Una solución propuesta consiste en añadir autobancos que faciliten a los clientes que llegan en automóvil recibir un servicio rápido sin tener que estacionarse. Chris Carlson, presidente del banco, piensa que solo deberían arriesgar el costo de instalar una estación para automóviles. Su personal le ha informado que el costo (amortizado en un periodo de 20 años) de la construcción de una estación para automóviles es de $12,000 al año. Cada ventanilla también representa $16,000 anuales por concepto de salarios y prestaciones para los empleados de dicha ventanilla. La directora de análisis administrativo, Beth Shader, cree que los siguiente dos factores promueven la construcción inmediata de dos estaciones para automóviles. Según un artículo de reciente publicación en la revista Banking Research, los clientes que esperan en largas colas de un servicio de terminales para automóviles le representan al banco un costo de $1 por minuto en la pérdida de la buena voluntad por parte del cliente. También la construcción de una segunda estación significa $16,000 adicionales en costos por la contratación de personal, pero los costos amortizados de la construcción pueden reducirse a $20,000 anuales si se instalan dos estaciones simultáneamente en lugar de una sola. Para terminar su análisis Shader recopiló datos mensuales sobre la llegada de clientes y las cuotas de servicio aplicables en las estaciones para automóviles que existen en los bancos competidores del centro de la ciudad. Estos datos se muestran en los análisis de observación 1 y 2 que aparecen en las siguientes tablas:

Análisis de observación 1: Tiempos entre llegadas para 1000 observaciones					
Tiempos entre llegadas en minutos.	1	2	3	4	5
Número de ocurrencias.	200	250	300	150	100

Análisis de observación 2: Tiempos de servicio por 1000 clientes						
Tiempos de servicio en minutos.	1	2	3	4	5	6
Número de ocurrencias.	100	150	350	150	150	100

a. Simule la llegada de 500 automóviles con una ventanilla y calcule el costo total del sistema.
b. Simule la llegada de 500 automóviles con dos ventanillas y calcule el costo total del sistema. ¿Cuál opción recomendaría usted?