4

Algoritmo simplex y la programación por objetivos

En el capítulo 3 se estudió cómo resolver en forma gráfica problemas de programación lineal con dos variables. Desafortunadamente, la mayor parte de los PL de la vida cotidiana tiene varias variables, por lo que es necesario un método para resolver PL con más de dos variables. La mayor parte de este capítulo se destina al algoritmo simplex, que se utiliza para resolver incluso PL muy largos. El algoritmo simplex se usa para resolver PL que tienen miles de restricciones y variables, y que se aplican en la industria.

En este capítulo se explica cómo se puede utilizar el algoritmo simplex para encontrar las soluciones óptimas de PL. Además, se explica con detalle cómo se usan los paquetes más modernos para computadora (LINDO y LINGO) para resolver PL. También se analiza con brevedad el enfoque innovador de Karmarkar para resolver PL. El capítulo termina con una introducción a la programación por objetivos, la cual permite más de una función objetivo a quien toma decisiones.

4.1 Cómo convertir un PL en una forma estándar

Ya se estudió que un PL puede tener tanto restricciones de igualdad como restricciones de desigualdad. Asimismo, puede tener variables que es necesario que sean no negativas, así como las que no tienen restricciones de signo (nrs). Antes de poder utilizar el algoritmo simplex para resolver un PL, éste se debe convertir en un problema equivalente en el cual todas las restricciones son ecuaciones y todas las variables son no negativas. Se dice que un PL en esta forma está en la **forma estándar**.†

Para convertir un PL en la forma estándar, cada restricción de desigualdad se debe reemplazar por una restricción de igualdad. Este procedimiento se ilustra mediante el problema siguiente:

EJEMPLO 1 Leather Limited

Leather Limited fabrica dos tipos de cinturones: el modelo de lujo y el modelo regular. Para cada tipo se requiere una yarda cuadrada de piel. Se necesita una hora de mano de obra calificada para un cinturón regular, y para un cinturón de lujo se requieren 2 horas. Se dispone cada semana de 40 yardas cuadradas de piel y 60 horas de mano de obra calificada. Cada cinturón regular aporta 3 dólares a la utilidad, y cada cinturón de lujo, 4 dólares. Si se definen

$$x_1 = \text{cantidad de cinturones de lujo fabricados cada semana}$$
$$x_2 = \text{cantidad de cinturones regulares producidos a la semana}$$

†En toda la primera parte de este capítulo, se supone que todas las variables tienen que ser no negativas (≥ 0). La conversión de variables nrs a variables no negativas, se estudia en la sección 4.12.

El PL adecuado es

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 \qquad \text{(PL 1)}$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 40 \qquad \text{(Restricción de la piel)} \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 60 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra)} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¿Cómo se pueden convertir (1) y (2) en restricciones de igualdad? Se define para cada restricción $\leq$ una **variable de holgura** s_i(s_i = variable de holgura para la restricción i-ésima), que es la cantidad de recursos sin usar en la restricción i-ésima. Como se usan $x_1 + x_2$ yardas cuadradas de piel y se dispone de 40 yardas cuadradas, s_1 se define mediante

$$s_1 = 40 - x_1 - x_2 \qquad \text{o bien,} \qquad x_1 + x_2 + s_1 = 40$$

De igual manera, s_2 se define por medio de

$$s_2 = 60 - 2x_1 - x_2 \qquad \text{o bien,} \qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 60$$

Obsérvese que un punto (x_1, x_2) satisface la restricción i-ésima si y sólo si $s_i \geq 0$. Por ejemplo, $x_1 = 15, x_2 = 20$ satisface (1) porque $s_1 = 40 - 15 - 20 = 5 \geq 0$.

Intuitivamente, el punto (15, 20) cumple con (1) porque $s_1 = 5$ yardas cuadradas de piel quedan sin usar. De manera similar, el punto (15, 20) satisface a (2) porque $s_2 = 60 - 2(15) - 20 = 10$ horas de mano de obra que no se utilizan. Por último, note que el punto $x_1 = x_2 = 25$ no cumple con (2) porque $s_2 = 60 - 2(25) - 25 = -15$ indica que (25, 25) usa más mano de obra que la que se tiene disponible.

En resumen, para transformar (1) en una restricción de igualdad se reemplaza (1) por $s_1 = 40 - x_1 - x_2$ (o bien, $x_1 + x_2 + s_1 = 40$) y $s_1 \geq 0$. Para convertir (2) en una restricción de igualdad, se reemplaza (2) por $s_2 = 60 - 2x_1 - x_2$ (o bien, $2x_1 + x_2 + s_2 = 60$) y $s_2 \geq 0$. Así se convierte el PL en

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + s_1 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 60 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(PL 1')}$$

Obsérvese que PL 1' es una forma estándar. En resumen, *si la restricción i de un PL es una restricción $\leq$, entonces se convierte en una restricción de igualdad al sumar una variable de holgura s_i a la restricción i-ésima y añadir la restricción de signo $s_i \geq 0$.*

Para ilustrar cómo una restricción $\geq$ se puede convertir en una restricción de igualdad, considérese el problema de la dieta de la sección 3.4.

$$\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

$$\text{s.a} \quad 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 \qquad \text{(Restricción de las calorías)} \qquad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \qquad \text{(Restricción del chocolate)} \qquad (4)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10 \qquad \text{(Restricción del azúcar)} \qquad (5)$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8 \qquad \text{(Restricción de la grasa)} \qquad (6)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Para convertir la restricción i-ésima $\geq$ en una restricción de igualdad, se define una variable de excedente o superflua e_i. (e_i siempre será la variable de excedente para la restricción i-ésima.) Se define e_i como la cantidad con la cual la restricción i–ésima se satisface en exceso. Por tanto, para el problema de la dieta, se tiene

$$e_1 = 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - 500, \quad \text{o} \quad 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 = 500 \tag{3'}$$

$$e_2 = 3x_1 + 2x_2 - 6, \quad \text{o bien,} \quad 3x_1 + 2x_2 - e_2 = 6 \tag{4'}$$

$$e_3 = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 10, \quad \text{o bien,} \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - e_3 = 10 \tag{5'}$$

$$e_4 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - 8, \quad \text{o bien,} \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - e_4 = 8 \tag{6'}$$

Un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) cumple la restricción i-ésima $\geq$ si y sólo si e_i es no negativa. Por ejemplo, de (4′), $e_2 \geq 0$ si y sólo si $3x_1 + 2x_2 \geq 6$. Considérese el punto $x_1 = 2$, $x_3 = 4$, $x_2 = x_4 = 0$, para un ejemplo numérico; dicho punto satisface las cuatro restricciones del problema de la dieta. Por lo que se refiere a este punto,

$$\begin{aligned} e_1 &= 400(2) + 150(4) - 500 = 900 \geq 0 \\ e_2 &= 3(2) - 6 = 0 \geq 0 \\ e_3 &= 2(2) + 4(4) - 10 = 10 \geq 0 \\ e_4 &= 2(2) + 4 - 8 = 0 \geq 0 \end{aligned}$$

En otro ejemplo, considere $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$. Este punto es no factible; no cumple las restricciones del chocolate, el azúcar y la grasa. La ausencia de factibilidad de este punto está indicada por

$$\begin{aligned} e_2 &= 3(1) + 2(1) - 6 \;\;= -1 < 0 \\ e_3 &= 2(1) + 2(1) - 10 = -6 < 0 \\ e_4 &= 2(1) + 4(1) - 8 \;\;= -2 < 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, para transformar el problema de la dieta en una forma estándar, se reemplaza (3) por (3′); (4) por (4′); (5) por (5′) y (6) por (6′). También se deben agregar las restricciones de signo $e_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. El PL resultante está en la forma estándar y se podría escribir como

$$\begin{aligned} \min z = {} & 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4 \\ \text{s.a} \quad & 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 = 500 \\ & 3x_1 + 2x_2 - e_2 = 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - e_3 = 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - e_4 = 8 \\ & x_i, e_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

En resumen, *si la restricción i-ésima de una PL es una restricción* $\geq$, *entonces se puede convertir en una restricción de igualdad al restar una variable de excedente* e_i *de la restricción i-ésima y añadir la restricción de signo* $e_i \geq 0$.

Si un PL tiene tanto restricciones $\leq$ como $\geq$ entonces se aplican simplemente los procedimientos que ya se explicaron para las restricciones individuales. Como ejemplo se convertirá el modelo de planificación financiera de corto plazo de la sección 3.7 en la forma estándar. Recuerde que el PL original era

$$\begin{aligned} \max z = {} & 20x_1 + 15x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 \leq 100 \\ & x_2 \leq 100 \\ & 50x_1 + 35x_2 \leq 6\,000 \\ & 20x_1 + 15x_2 \geq 2\,000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para seguir con el procedimiento explicado antes, se transforma este PL en la forma estándar al sumarle las variables de holgura s_1, s_2 y s_3, respectivamente, a las primeras tres restricciones y restarle una variable de excedente e_4 a la cuarta restricción. Luego se añaden las restricciones de signo $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$ y $e_4 \geq 0$. Lo anterior da el siguiente PL en la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 20x_1 + 15x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + \quad + s_1 = 100 \\
& x_2 \quad + s_2 = 100 \\
& 50x_1 + 35x_2 \quad + s_3 = 6\,000 \\
& 20x_1 + 15x_2 \quad - e_4 = 2\,000 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2); \qquad s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3); \qquad e_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Naturalmente, se podía haber llamado e_1 a la variable de excedente para la cuarta limitación (porque es la primera variable de excedente). Se prefirió llamarla e_4 y no e_1 para indicar que e_4 es la variable de excedente para la cuarta limitación.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Convierta el problema de Giapetto (ejemplo 1 del capítulo 3) en la forma estándar.

2 Convierta el problema de Dorian (ejemplo 2 del capítulo 3) en la forma estándar.

3 Convierta el PL siguiente en la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 3x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 \geq 3 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 - x_2 = 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

4.2 Preliminares del algoritmo simplex

Suponga que se ha convertido un PL con m restricciones en la forma estándar. Si se supone que la forma estándar contiene n variables (denominadas por conveniencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$), la forma estándar para tal PL es

$$
\begin{aligned}
\max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&(\text{o min}) \\
\text{s.a.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Si se define

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

las restricciones para (7) se podrían escribir como el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Antes de seguir adelante con la explicación del algoritmo simplex es necesario definir el concepto de solución básica para un sistema lineal.

Variables básicas y no básicas

Considere un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m ecuaciones lineales y n variables (suponga $n \geq m$).

DEFINICIÓN ■ Una solución básica para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene haciendo $n - m$ variables iguales a cero, y luego se determinan los valores de las m variables restantes. Así se asume que al hacer las $n - m$ variables iguales a cero se llega a valores únicos para las m variables restantes, o que, en forma equivalente, las columnas para las m variables restantes son linealmente independientes. ■

Con el objeto de hallar una solución básica para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, primero se escoge un conjunto de $n - m$ variables (las **variables no básicas,** VNB) y se iguala cada una de las variables a cero. Luego se encuentran los valores de las $n - (n - m) = m$ variables restantes (las variables básicas, VB) que satisfacen a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Es evidente que las elecciones distintas de variables no básicas ocasionan diferentes soluciones básicas. Con el fin de ilustrarlo se determinan enseguida todas las soluciones básicas del sistema siguiente de dos ecuaciones y tres variables:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{8}$$

Se empieza por escoger un conjunto de $3 - 2 = 1$ (3 variables, 2 ecuaciones) variable no básica. Por ejemplo, si VNB $= \{x_3\}$, entonces, BV $= \{x_1, x_2\}$. Los valores de las variables básicas se obtienen haciendo $x_3 = 0$ y resolviendo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Se encuentra que $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Por lo tanto, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ es una solución básica para (8). No obstante, si se escoge VNB $= \{x_1\}$ y VB $= \{x_2, x_3\}$, se llega a la solución básica $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$. Si se prefiere VNB $= \{x_2\}$, se tiene la solución básica $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$. El estudiante debe verificar estos resultados.

Algunos conjuntos de m variables no originan una solución básica. Por ejemplo, considérese el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Si se escoge VNB $= \{x_3\}$ y VB $= \{x_1, x_2\}$, la solución básica correspondiente se obtendría al resolver

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Como este sistema no tiene solución, no hay solución básica que corresponda a VB = $\{x_1, x_2\}$.

Soluciones factibles

Un cierto subconjunto de las soluciones básicas para las restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de un PL tiene una función importante en la teoría de la programación lineal.

DEFINICIÓN ■ Cualquier solución básica de (7) en la cual todas las variables son no negativas es una **solución factible básica** (o **sfb**). ■

Por lo tanto, para un PL con las restricciones dadas en (8), las soluciones básicas $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ y $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$ son soluciones básicas *factibles*, pero la solución básica $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$ no es una solución básica factible (porque $x_3 < 0$).

En lo que resta de la sección se supone que todas los PL están en la forma estándar. Recuérdese que en la sección 3.2 se estableció que la región factible para cualquier PL es un conjunto convexo. Sea S la región factible para un PL en la forma estándar. Recuerde que un punto P es un punto extremo de S si para todos los segmentos de recta que contienen a P y están contenidos por completo en S, P es un punto terminal. Esto da como resultado que los puntos extremos de la región factible de un PL y las soluciones factibles básicas de un PL sean en realidad lo mismo. De manera más formal,

TEOREMA 1

Un punto en la región factible de un PL es un punto extremo si y sólo si es una solución factible básica para una PL.

Véase en Luenberger (1984) una demostración del teorema 1.

Para ilustrar la correspondencia entre puntos extremos y soluciones factibles básicas señaladas en el teorema 1, veamos el ejemplo de Leather Limited de la sección 4.1. Recuérdese que el PL era

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 40 && \textbf{(LP 1)} \\
2x_1 + x_2 &\le 60 && \textbf{(1)} \\
x_1, x_2 &\ge 0 && \textbf{(2)}
\end{aligned}
$$

Tras agregar las variables de holgura s_1 y s_2, respectivamente, a (1) y (2), se obtiene la PL 1 en la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + s_1 &= 40 \\
2x_1 + x_2 + s_2 &= 60 \qquad \textbf{(LP 1')} \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

La región factible para el problema de Leather Limited se grafica en la figura 1. Se cumplen las dos desigualdades: (1) las satisfacen todos los puntos abajo de la recta $AB(x_1 + x_2 = 40)$ o en ella y (2) todos los puntos en la recta $CD(2x_1 + x_2 = 60)$. Por consiguiente, la región factible para la PL 1 es la zona sombreada limitada por la figura $BECF$. Los puntos extremos de la región factible son $B = (0, 40)$, $C = (30, 0)$, $E = (20, 20)$ y $F = (0, 0)$.

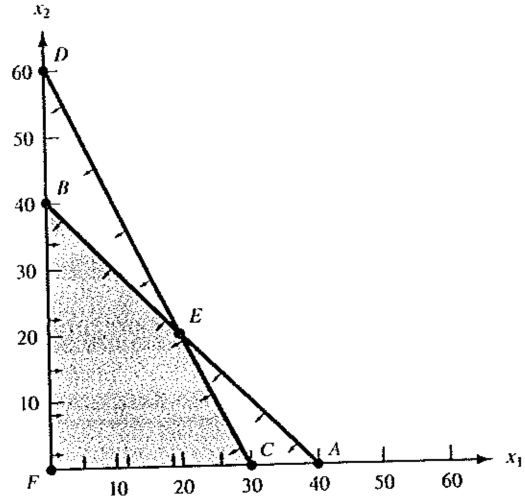

FIGURA 1
Región factible para Leather Limited (LL)

La correspondencia entre las soluciones factibles básicas para PL 1′ y los puntos extremos de la región factible para PL 1 se indican en la tabla 1. Este ejemplo debe poner en claro que las soluciones factibles básicas para la forma estándar de un PL corresponden de modo natural a los puntos extremos del PL.

En el contexto del ejemplo de Leather Limited, es fácil demostrar por qué cualquier sfb es un punto extremo. ¡Lo contrario es más difícil! Se mostrará a continuación que para el problema de LL, cualquier sfb es un punto extremo. Cualquier punto en la región factible para LL se podría especificar como un vector columna de cuatro dimensiones con los cuatro elementos del vector que denotan x_1, x_2, s_1, s_2, respectivamente. Considere la sfb B con VB $= \{x_2, s_2\}$. Si B no es un punto extremo, entonces hay dos puntos factibles distintos v_1, v_2 y números no negativos σ_1 y σ_2 que satisfacen $0 < \sigma_i < 1$ y $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ tales que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2$$

Es evidente que tanto v_1 como v_2 deben tener $x_1 = s_2 = 0$. Pero como tanto v_1 como v_2 son factibles, los valores de x_2 y s_2 para v_1 y v_2 se pueden determinar al resolver $x_2 = 40$ y $x_2 + s_2 = 60$. Estas ecuaciones tienen una solución única (porque las columnas que corresponden a las variables básicas x_2 y s_2 son linealmente independientes). Esto demuestra que $v_1 = v_2$, por lo que B es ciertamente un punto extremo.

TABLA 1
Correspondencia entre soluciones factibles básicas y vértices para Leather Limited

Variables básicas	Variables no básicas	Soluciones factibles básicas	Corresponde a vértice (punto extremo)
x_1, x_2	s_1, s_2	$s_1 = s_2 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, s_1	x_2, s_2	$x_2 = s_2 = 0, x_1 = 30, s_1 = 10$	C
x_1, s_2	x_2, s_1	$x_2 = s_1 = 0, x_1 = 40, s_2 = -20$	No es sfb porque $s_2 < 0$
x_2, s_1	x_1, s_2	$x_1 = s_2 = 0, s_1 = -20, x_2 = 60$	No es sfb porque $s_1 < 0$
x_2, s_2	x_1, s_1	$x_1 = s_1 = 0, x_2 = 40, s_2 = 20$	B
s_1, s_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 60$	F

Se observa que más de un conjunto de variables básicas podrían corresponder a un punto extremo dado. Si éste es el caso, entonces se dice que la PL es **degenerada**. Un estudio del efecto de la degeneración en el algoritmo simplex se encuentra en la sección 4.11.

Pronto se verá que si un PL tiene una solución óptima, entonces tiene una sfb que es óptima. Lo anterior es importante porque cualquier PL tiene sólo una cantidad finita de sfb. Por lo tanto es posible encontrar la solución óptima para un PL mediante la *búsqueda de sólo una cantidad finita de puntos.* Y puesto que la región factible para cualquier PL contiene una cantidad infinita de puntos, ¡esto es de gran ayuda!

Antes de explicar por qué cualquier PL que tiene una solución óptima tiene una sfb, es necesario definir el concepto de **dirección de no acotamiento**.

4.3 Dirección de no acotamiento

Considere un PL en la forma estándar cuya región factible es S y tiene las restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Si se supone que este PL tiene n variables, $\mathbf{0}$ representa un vector columna n-dimensional constituido por ceros. Un vector no cero $\mathbf{d}$ está en una **dirección de no acotamiento** si para toda $\mathbf{x} \in S$ y cualquier $c \geq 0$, $x + c\mathbf{d} \in S$. En pocas palabras, si uno está en la región factible de la PL, entonces uno se puede desplazar tan lejos como quiera en la dirección $\mathbf{d}$ y permanecer dentro de la región factible. La región factible para el ejemplo de Dorian Auto (ejemplo 2 del capítulo 3) se ilustra en la figura 2. En la forma estándar, el ejemplo de Dorian es

$$\begin{aligned} \min z &= 50x_1 + 100x_2 \\ 7x_1 + \ \ 2x_2 - e_1 &= 28 \\ 2x_1 + 12x_2 - e_2 &= 24 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si se observa la figura 2, es evidente que si se empieza en cualquier punto factible y el desplazamiento es hacia arriba y a la derecha en un ángulo de 45°, siempre se permanecerá en la región factible. Esto quiere decir que

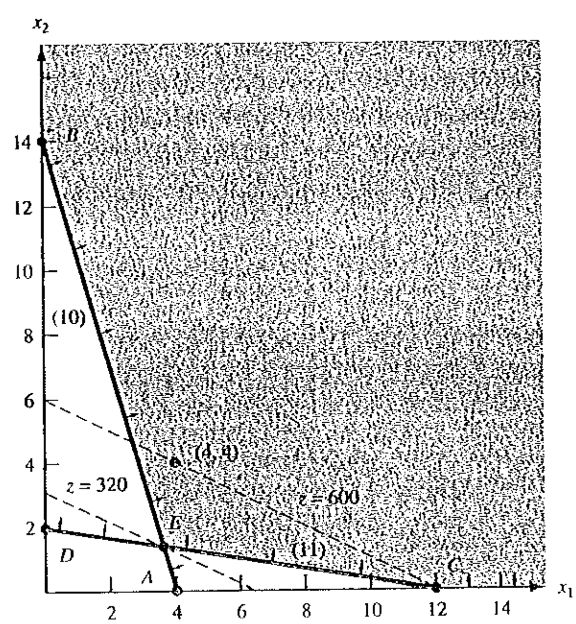

FIGURA 2
Solución gráfica del problema de Dorian

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

es una dirección de no acotamiento para este PL. Es fácil demostrar (véase problema 6) que **d** es una dirección de no acotamiento si y sólo si $A\mathbf{d} = 0$ y $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$.

El teorema de representación siguiente [véase una demostración en Nash y Sofer (1996)] es la reflexión clave para demostrar por qué cualquier PL con una solución óptima tiene una sfb óptima.

TEOREMA 2

Considere un PL en la forma estándar, que tiene sfb $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$. Cualquier punto x en la región factible del PL se podría escribir en la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$$

donde **d** es **0** o una dirección de ilimitabilidad y $\sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$.

Si la región factible del PL es acotada, entonces $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, y se podría escribir $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$, donde la σ_i son ponderaciones no negativos cuya suma es 1. En este caso se observa que cualquier **x** factible se podría escribir como una **combinación convexa** de las sfb de la PL. Enseguida se ilustra el teorema 2 mediante dos ejemplos.

Refiérase al ejemplo de Leather Limited. La región factible es acotada. Para ilustrar el teorema 2, se puede escribir el punto $G = (20, 10)$ (¡G no es una sfb!) en la figura 3 como una combinación convexa de las sfb del PL. Obsérvese en la figura 3 que el punto G también se podría escribir como $\frac{1}{6}F + \frac{5}{6}H$ [aquí $H = (24, 12)$]. Luego observe que el punto H se podría escribir como $0.6E + 0.4C$. Si se combinan estas dos relaciones, el punto G se podría escribir como $\frac{1}{6}F + \frac{5}{6}(0.6E + 0.4C) = \frac{1}{6}F + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}C$. De esta manera se expresa el punto G como una combinación convexa de los puntos extremos de la PL.

Para ilustrar el teorema 2 con un PL no acotado, considérese el ejemplo 2 del capítulo 3 (el ejemplo de Dorian; véase figura 4), y trate de expresar el punto $F = (14, 4)$ en la representación dada en el teorema 2. Recuerde que en la forma estándar, las restricciones para el ejemplo de Dorian están dadas por

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 - e_1 &= 28 \\ 2x_1 + 12x_2 - e_2 &= 24 \end{aligned}$$

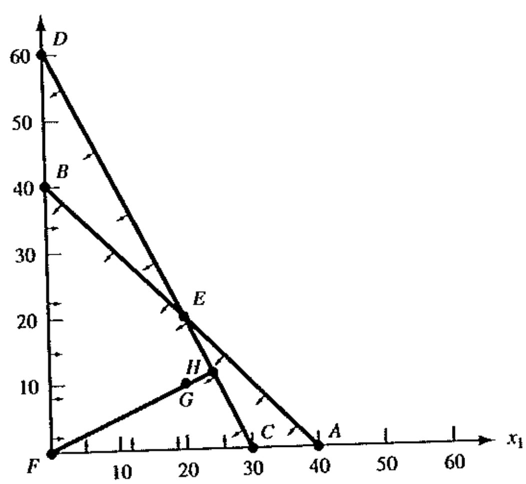

FIGURA 3
Representación de (20, 10) como una combinación convexa de sfb

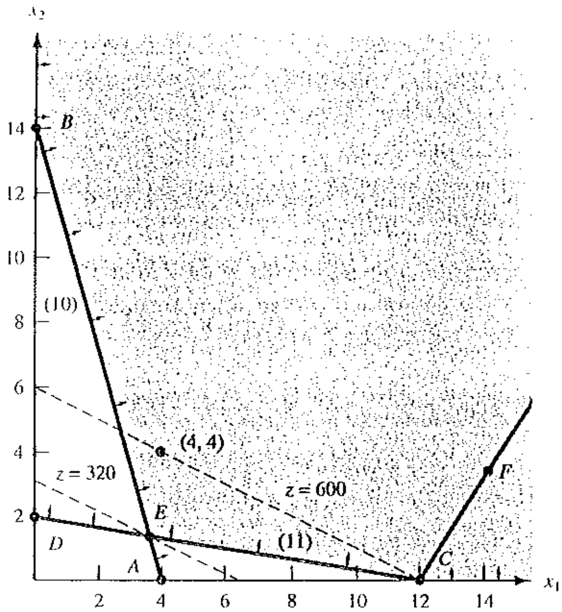

FIGURA 4
Expresión de F = (14, 4) usando el teorema 2

Si se sitúa uno en la figura 4, se observa que para desplazarse desde la sfb C hasta el punto F, es necesario subir y moverse hacia la derecha a lo largo de la recta cuya pendiente es $\frac{4-0}{14-12} = 2$. Esta recta corresponde a la dirección del no acotamiento

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 22 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Si

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 56 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 78 \\ 52 \end{bmatrix}$$

se podría escribir $\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{b}_1$, lo cual es la representación deseada.

4.4 ¿Por qué un PL tiene una sfb óptima?

Considere un PL con función objetivo max $\mathbf{cx}$ y restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Suponga que este PL tiene una solución óptima. A continuación se esboza una demostración del hecho de que el PL tiene una sfb óptima

TEOREMA 3

Si un PL tiene una solución óptima, entonces tiene una sfb óptima.

Demostración Sea $\mathbf{x}$ una solución óptima de este PL. Puesto que $\mathbf{x}$ es factible, el teorema 3 dice que se podría expresar $\mathbf{x} = \mathbf{d} + \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$, donde $\mathbf{d}$ es $\mathbf{0}$ o una dirección de no acotamiento y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ son las sfb de la PL. Asimismo, $\Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$. Si $\mathbf{cd} > \mathbf{0}$, entonces, para cualquier $k > 0$, $k\mathbf{d} + \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$ es factible, y como k se vuelve más y más grande, el valor de la función objetivo tiende al infinito. Lo anterior contradice el hecho de que la PL tiene una solución óptima. Si $\mathbf{cd} > \mathbf{0}$, entonces el punto factible $\Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$ tiene un valor de función objetivo más grande que $\mathbf{x}$. Lo anterior contradice la optimalidad de $\mathbf{x}$. En pocas palabras, se ha demostrado que si $\mathbf{x}$ es óptima, entonces $\mathbf{cd} = 0$. Ahora el valor de la función objetivo para $\mathbf{x}$ está dado por

$$\mathbf{cx} = \mathbf{cd} + \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{cb}_i = \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{cb}_i$$

Suponga que $\mathbf{b}_1$ es la sfb con el valor más grande de la función objetivo. Como $\Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$,

$$\mathbf{cb}_1 \geq \mathbf{cx}$$

Puesto que $\mathbf{x}$ es óptima, esto demuestra que $\mathbf{b}_1$ también es óptima, y la PL sí tiene una sfb óptima.

Soluciones factibles básicas adyacentes

Antes de describir el algoritmo simplex en términos generales, es necesario definir el concepto de una solución factible básica adyacente.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier **PL** con m restricciones, se dice que dos soluciones factibles básicas son **adyacentes** si sus conjuntos de variables básicas tienen $m - 1$ variables básicas en común. ■

Por ejemplo, en la figura 3, dos soluciones factibles básicas serán adyacentes si tienen $2 - 1 = 1$ variable básica en común. Por lo tanto, la sfb correspondiente al punto E en la figura 3 es adyacente a la sfb que corresponde al punto C. El punto E no es adyacente a la sfb F. De manera intuitiva, son adyacentes dos soluciones factibles básicas si ambas quedan en el mismo borde del límite de la región factible.

Ahora se proporciona una descripción general de cómo el algoritmo simplex resuelve PL en un problema de maximización.

Paso 1 Se encuentra una sfb para el PL. A esta sfb se le llama solución factible básica inicial. En general, la sfb más reciente se denomina sfb actual, por lo que al principio del problema la sfb inicial es la sfb actual.

Paso 2 Se determina si la sfb actual es una solución óptima para el PL. Si no es así, entonces se determina una sfb adyacente que tenga un valor de z mayor.

Paso 3 Se retorna al paso 2, y se usa la sfb nueva como sfb actual.

Si un PL en la forma estándar tiene m restricciones y n variables, entonces podría haber una solución básica para cada elección de variables no básicas. Si se tienen n variables, se puede seleccionar un conjunto de $n - m$ variables no básicas (o en forma equivalente, m variables básicas) en

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n - m)!m!}$$

maneras diferentes. Por lo tanto, un PL puede tener cuando mucho

$$\binom{n}{m}$$

soluciones básicas. Como algunas soluciones básicas podrían no ser factibles, un PL puede tener cuando mucho

$$\binom{n}{m}$$

soluciones factibles básicas. Si se procediera desde la sfb actual hasta una sfb mejor (sin repetir una sfb), entonces se encontraría con toda seguridad la sfb óptima después de examinar cuando mucho

$$\binom{n}{m}$$

soluciones factibles básicas. Esto significa (suponiendo que ninguna sfb se repite) que el algoritmo simplex encontrará la sfb óptima después de un número finito de cálculos. Regresaremos a este análisis en la sección 4.11.

Se podrían enumerar en principio todas las soluciones factibles básicas para un PL y encontrar la sfb con el valor de z más grande. El problema con este procedimiento es que hasta la PL pequeños tienen una cantidad muy grande de soluciones factibles básicas. Por ejemplo, un PL en la forma estándar que tiene 20 variables y 10 restricciones podría tener (si cada solución básica fuera factible) hasta

$$\binom{20}{10} = 184\,756$$

soluciones factibles básicas. Por fortuna, la vasta experiencia con el algoritmo simplex indica que cuando se aplica este algoritmo a un PL de n variables y m restricciones en la forma estándar una solución óptima se encuentra por lo regular después de examinar menos de $3m$ soluciones factibles básicas. Por lo tanto, para un PL de 20 variables, 10 restricciones en la forma estándar, el algoritmo simplex determinará normalmente la solución óptima después de examinar menos de $3(10) = 30$ soluciones factibles básicas. En comparación con la posibilidad de examinar 184 756 soluciones básicas, ¡el simplex es muy efectivo!†

Características geométricas de los PL tridimensionales

Considere el PL siguiente

$$\begin{aligned} \max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.a} \qquad 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto de puntos que satisface una desigualdad lineal en tres (o cualquier número de) dimensiones es un **semiespacio**. Por ejemplo, el conjunto de puntos en tres dimensiones que satisface $2x_1 + x_2 \leq 8$ es un semiespacio. Por lo tanto, la región factible para este PL es la intersección de los cinco semiespacios siguientes: $2x_1 + x_2 \leq 8$, $x_3 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. La intersección de los semiespacios se llama **poliedro**. La región factible para este PL es el prisma de la figura 5.

Una restricción (o restricción de signo) es activa u obligatoria para todos los puntos de cada una de las caras o facetas de la región factible. Por ejemplo, la restricción $2x_1 + x_2 \leq 8$ es activa para todos los puntos de la cara *ABCD*; $x_3 \geq 0$ es activa en la cara *ABF*; $x_3 \leq 10$ es activa en la cara *DEC*; $x_2 \geq 0$ es activa en la cara *ADEF*; $x_1 \geq 0$ es activa en la cara *CBFE*.

Evidentemente, los vértices (o puntos extremos) de la región factible del PL son *A, B, C, D, E* y *F*. En este caso, la correspondencia entre la sfb y los vértices es como se señala en la tabla 2.

Para ilustrar el concepto de las soluciones factibles básicas adyacentes, observe que los vértices *A, E* y *B* son adyacentes al vértice *F*. Por consiguiente, si el algoritmo simplex empieza en *F*, entonces podemos estar seguros de que la siguiente sfb por ser considerada será *A, E* o *B*.

†Al resolver muchos PL con 50 variables y $m \leq 50$ restricciones, Chvàtal (1983) encontró que el algoritmo simplex examinó un promedio de $2m$ soluciones factibles básicas antes de hallar una solución óptima para el PL.

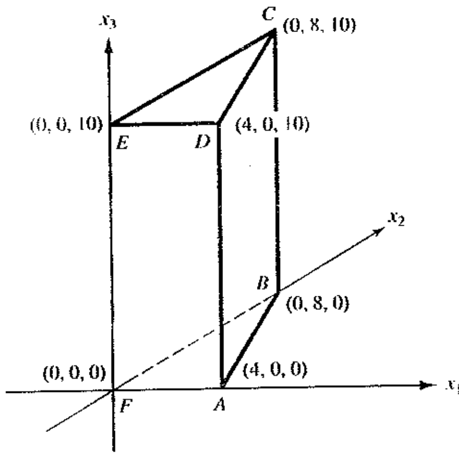

FIGURA 5
Región factible en tres dimensiones

TABLA 2
Correspondencia entre sfb y vértices

Variables básicas	Solución factible básica	Corresponde al punto extremo
x_1, x_3	$x_1 = 4, x_3 = 10, x_2 = s_1 = s_2 = 0$	D
s_1, s_2	$s_1 = 8, s_2 = 10, x_1 = x_2 = x_3 = 0$	F
s_1, x_3	$s_1 = 8, x_3 = 10, x_1 = x_2 = s_2 = 0$	E
x_2, x_3	$x_2 = 8, x_3 = 10, x_1 = s_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 8, s_2 = 10, x_1 = x_3 = s_1 = 0$	B
x_1, s_2	$x_1 = 4, s_2 = 10, x_2 = x_3 = s_1 = 0$	A

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre cuál es la correspondencia entre las soluciones factibles básicas de la PL en forma estándar y los puntos extremos de la región factible para el problema de Giapetto (ejemplo 1 en el capítulo 3).

2 Demuestre cuál es la correspondencia entre las soluciones factibles básicas del PL en forma estándar y los puntos extremos de la región factible para el problema de Dorian (ejemplo 2 en el capítulo 3).

3 Widgetco elabora dos productos: 1 y 2. La cantidad de materia prima, mano de obra y el precio de venta se proporcionan en la tabla 3.

Hasta 350 unidades de materia prima se pueden comprar a 2 dólares por unidad, y hasta 400 horas de mano de obra se pueden conseguir a 1.5 dólares por hora. Para maximizar la utilidad, Widgetco debe resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2.5x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 350 \quad \text{(Materia prima)} \\ 2x_1 + x_2 &\le 400 \quad \text{(Mano de obra)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Aquí, x_i = número de unidades del producto i elaboradas. Demuestre la correspondencia entre puntos extremos y soluciones factibles básicas.

TABLA 3

	Producto 1	Producto 2
Materia prima	1 unidad	2 unidades
Mano de obra	2 h	1 h
Precio de venta	\$7	\$8

4 Represente el punto (10, 20) en la forma $\mathbf{c}\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$, para el problema Leather Limited.

5 Para el problema de Dorian, represente el punto (10, 40) en la forma $\mathbf{c}\mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$.

Grupo B

6 Demuestre que $\mathbf{d}$ es una dirección de no acotamiento si y sólo si $A\mathbf{d} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{d} \ge \mathbf{0}$, para un PL en la forma estándar con restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.

7 Recuerde que el ejemplo 5 del capítulo 3 es una PL no acotado. Encuentre una dirección de no acotamiento en la que uno se pueda desplazar y para la cual la función objetivo se vuelva arbitrariamente grande.

4.5 Algoritmo simplex

Enseguida se explica cómo se puede utilizar el algoritmo simplex para resolver el PL en el que el fin es maximizar la función objetivo. La solución a problemas de minimización se trata en la sección 4.4.

El algoritmo simplex procede como sigue:

Paso 1 Convertir la PL en la forma estándar (véase sección 4.1).

Paso 2 Obtener una sfb (si es posible) a partir de la forma estándar.

Paso 3 Determinar si la sfb actual es óptima.

Paso 4 Si la sfb actual no es óptima, entonces se determina cuál variable no básica se debe transformar en variable básica y cuál variable básica se debe transformar en variable no básica con el objeto de hallar una nueva sfb con un mejor valor de la función objetivo.

Paso 5 Aplicar OER para encontrar la nueva sfb con el mejor valor de la función objetivo. Regresar al paso 3.

Al ejecutar el algoritmo simplex, se escribe la función objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

en la forma

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = 0$$

Este formato se denomina **versión del renglón 0** de la función objetivo (o sólo renglón 0, para simplificar).

EJEMPLO 2 Dakota Furniture Company

La Dakota Furniture Company fabrica escritorios, mesas y sillas. Para la manufactura de cada tipo de mueble se requiere madera y dos tipos de mano de obra calificada: acabado y carpintería. La cantidad de recursos necesarios para elaborar cada tipo de muebles se proporciona en la tabla 4.

Se cuenta en la actualidad con 48 pies tablón de madera, 20 horas de acabado y 8 horas de carpintería. Un escritorio se vende en 60 dólares, una mesa, en 30 dólares y una silla en 20 dólares. Dakota opina que la demanda de escritorios y sillas es ilimitada, pero cuando mucho se pueden vender 5 mesas. Puesto que los recursos disponibles ya se compraron, Dakota quiere maximizar el ingreso total. Si se definen las variables de decisión como

$$x_1 = \text{cantidad de escritorios fabricados}$$

$$x_2 = \text{cantidad de mesas fabricadas}$$

$$x_3 = \text{cantidad de sillas fabricadas}$$

TABLA 4

Recursos necesarios para los muebles de Dakota

Recurso	Escritorio	Mesa	Silla
Madera (pie tablón)	8	6	1
Horas de acabado	4	2	1.5
Horas de carpintería	2	1.5	0.5

es fácil darse cuenta de que Dakota debe resolver la PL siguiente:

$$\begin{array}{llr}
\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\
\text{s.a} \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 & & \text{(Restricción de la madera)} \\
\quad 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 & & \text{(Restricción del acabado)} \\
\quad 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 & & \text{(Restricción de la carpintería)} \\
\quad x_2 \leq 5 & & \text{(Restricción de la demanda de mesas)} \\
\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Conversión de la PL en la forma estándar

Para empezar el algoritmo simplex, se transforman las restricciones de la PL en la forma estándar, que se estudió en la sección 4.1. Luego se convierte la función objetivo de la PL en el formato del renglón 0. Para poner las restricciones en la forma estándar se añaden simple y respectivamente las variables de holgura s_1, s_2, s_3 y s_4, a las cuatro restricciones. Las restricciones se designan renglón 1, renglón, 2, renglón 3 y renglón 4, y se agregan las restricciones de signo $s_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Observe que el formato de renglón 0 para la función objetivo es

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

Al poner los renglones 1 a 4 junto con el renglón 0 y las restricciones de signo se obtienen las ecuaciones y las variables básicas que se proporcionan en la tabla 5. Un sistema de ecuaciones lineales (tal como la forma canónica 0 mostrada en la tabla 5) en el cual cada ecuación tiene una variable con un coeficiente de 1 en esa ecuación (y un coeficiente cero en todas las otras ecuaciones) se dice que está en la *forma canónica*. Pronto se verá que si el segundo miembro (el lado derecho) de cada restricción en forma canónica es no negativo, entonces se puede conseguir mediante inspección una solución factible básica.†

Se mencionó en la sección 4.2 que el algoritmo simplex empieza con una solución factible básica inicial y pretende encontrar otras mejores. Por lo tanto, después de obtener una forma canónica se busca una sfb inicial. Por inspección se observa que si hacemos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, entonces es posible determinar los valores de s_1, s_2, s_3 y s_4 igualando s_i con el segundo miembro del renglón i.

$$\text{VB} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

TABLA 5
Forma canónica 0

Renglón			Variable básica
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3$	$= 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1$	$= 48$	$s_1 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2$	$= 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3$	$= 8$	$s_3 = 8$
4	$x_2 + s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

†Si no se obtiene en forma fácil una forma canónica con segundos miembros no negativos, entonces se pueden aplicar las técnicas explicadas en las secciones 4.12 y 4.13 con el fin de hallar una forma canónica y una solución factible básica.

La solución factible básica para este conjunto de variables básicas es $s_1 = 48$, $s_2 = 20$, $s_3 = 8$, $s_4 = 5$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Nótese que cada variable básica se podría relacionar con el renglón de la forma canónica en el cual la variable básica tiene un coeficiente de 1. Por lo tanto, para la forma canónica 0, se podría pensar que s_1 es la variable básica para el renglón 1, s_2 para el renglón 2, s_3 para el renglón 3 y s_4 para el renglón 4.

Para ejecutar el algoritmo simplex, se requiere también una variable básica (aunque no necesariamente no negativa) para el renglón 0. Como z aparece en el renglón 0 con un coeficiente de 1 y z no aparece en ningún otro renglón, se considera a z como su variable básica. Con esta convención, la solución factible básica para la forma canónica inicial tiene

$$\text{VB} = \{z, s_1, s_2, s_3, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Para esta solución básica factible, $z = 0$, $s_1 = 48$, $s_2 = 20$, $s_3 = 8$, $s_4 = 5$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Como este ejemplo lo señala, se puede utilizar una variable de holgura como variable básica para una ecuación si el segundo miembro de la restricción es no negativo.

¿Es óptima la solución factible básica actual?

Tras obtener una solución factible básica es necesario determinar si es óptima. Si la sfb no es óptima, entonces se intenta encontrar una sfb adyacente a la sfb inicial con un valor z más grande. Para hacerlo se trata de determinar si hay un modo en que z se incremente al incrementar alguna variable no básica a partir de su valor actual de cero, pero conservando todas las otras variables no básicas en sus valores actuales de cero. Si se determina z mediante el reacomodo del renglón 0, entonces se tiene

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \tag{9}$$

Por lo que se refiere a cada variable no básica, se puede utilizar (9) para determinar si al incrementar una variable no básica (y conservar todas las otras variables no básicas iguales a cero) se incrementará z. Por ejemplo, suponga que incrementamos x_1 en 1 (y se mantienen las otras variables no básicas x_2 y x_3 iguales a cero). Entonces, (9) señala que z se incrementará en 60. De manera similar, si se decide incrementar x_2 en 1 (y se mantienen x_1 y x_3 iguales a cero), entonces (9) indica que z se incrementará en 30. Por último, si se incrementa x_3 en 1 (y se mantienen x_1 y x_2 iguales a cero), entonces (9) nos dice que z se incrementará en 20. Por lo tanto, al incrementar cualquiera de las variables no básicas aumenta z. Como el incremento de una unidad en x_1 ocasiona el mayor incremento en z, entonces se decide incrementar x_1 a partir de su valor actual de cero. Si x_1 se incrementará a partir de su valor actual de cero, entonces se tendrá que convertir en una variable básica. Por esta razón, x_1 se denomina variable entrante. Obsérvese que x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0.

Determinación de la variable entrante

Se escoge a la variable entrante (en un problema de maximización) como la variable no básica con el coeficiente más negativo en el renglón 0 (los empates se podrían deshacer de manera arbitraria). Como cada incremento de x_1 de una unidad hace que z aumente en 60, nos gustaría hacer a x_1 tan grande como sea posible. ¿Qué es lo que limita la magnitud de x_1? Note que cuando x_1 aumenta, cambian los valores de las variables básicas actuales (s_1, s_2, s_3 y s_4). Esto significa que el incremento de x_1 podría originar que una variable básica se vuelva negativa. Con esto en mente vemos cómo al incrementar x_1 (pero conservando $x_2 = x_3 = 0$) cambian los valores del conjunto actual de variables básicas. A partir del renglón 1 se ve que $s_1 = 48 - 8x_1$ (recuerde que $x_2 = x_3 = 0$). Puesto que se debe cumplir la restricción de signo $s_1 \geq 0$ sólo se puede incrementar x_1 con la condición de que $s_1 \geq 0$, es decir, $48 - 8x_1 \geq 0$, o bien, $x_1 \leq \frac{48}{8} = 6$. A partir del renglón 2, $s_2 = 20 - 4x_1$. Sólo se puede incrementar x_1 con la condición de que $s_2 \geq 0$, así que x_1 debe satisfacer $20 - 4x_1 \geq 0$, o bien, $x_1 \leq \frac{20}{4} = 5$. A partir del renglón 3, $s_3 = 8 - 2x_1$ así que $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$. Se observa de igual manera que a partir del renglón 4, $s_4 = 5$. Por consiguiente, cualquiera que sea el valor de x_1, s_4 será no negativa. En resumen,

$$
\begin{aligned}
s_1 &\geq 0 \qquad \text{para} \qquad x_1 \leq \frac{48}{8} = 6 \\
s_2 &\geq 0 \qquad \text{para} \qquad x_1 \leq \frac{20}{4} = 5 \\
s_3 &\geq 0 \qquad \text{para} \qquad x_1 \leq \frac{8}{2} = 4 \\
s_4 &\geq 0 \qquad \text{para todos los valores de } x_1
\end{aligned}
$$

Lo anterior quiere decir que, para mantener todas las variables básicas no negativas, el valor más grande que puede tener x_1 es $\min\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\} = 4$. Si $x_1 > 4$, entonces s_3 se volverá negativa, y ya no se tendrá una solución factible básica. Obsérvese que cada renglón en el cual la variable entrante tenía un coeficiente positivo restringía la magnitud de dicha variable entrante. Asimismo, para cualquier renglón en el cual la variable entrante tenía un coeficiente positivo, la variable básica del renglón se volvía negativa cuando se sobrepasaba la variable entrante

$$
\frac{\text{Lado derecho del renglón}}{\text{Coeficiente de la variable entrante en el renglón}} \tag{10}
$$

Si la variable entrante tiene un coeficiente no positivo en un renglón (tal como x_1 en el renglón 4), la variable básica del renglón seguirá siendo positiva para todos los valores de la variable entrante. Mediante (10) se puede calcular con rapidez qué tan grande puede ser x_1 antes de que una variable básica se vuelva negativa.

Límite del renglón 1 en $x_1 = \frac{48}{8} = 6$

Límite del renglón 2 en $x_1 = \frac{20}{4} = 5$

Límite del renglón 3 en $x_1 = \frac{8}{2} = 4$

Límite del renglón 4 en x_1 = ningún límite (porque el coeficiente de x_1 en el renglón 4 no es positivo)

Ya se puede formular la regla siguiente para determinar qué tan grande podemos hacer una variable entrante.

Prueba del cociente

Cuando introduzca una variable en la base, calcule el cociente (10) por cada restricción en la cual la variable entrante tiene un coeficiente positivo. La restricción con el cociente más pequeño se denomina **ganador de la prueba del cociente**. El cociente más pequeño es el valor más grande de la variable entrante que conservará todas las variables básicas actuales no negativas. En el ejemplo, el renglón 3 fue el ganador de la prueba del cociente para introducir x_1 a la base.

Determinación de una solución factible básica nueva: pivoteo en la variable entrante

Si volvemos al ejemplo, sabemos que el valor más grande que puede tener x_1 es 4. En el caso de que $x_1 = 4$, ésta se debe volver entonces una variable básica. Al observar los renglones 1 a 4, se encuentra que si x_1 se vuelve una variable básica en el renglón 1, entonces, $x_1 = \frac{48}{8} = 6$; en el renglón 2, $x_1 = \frac{20}{4} = 5$; en el renglón 3, $x_1 = \frac{8}{2} = 4$. Asimismo, como x_1 no está en el renglón 4, x_1 no puede llegar a ser variable básica en el renglón 4. Por lo tanto, si se desea que $x_1 = 4$, se tiene que convertir en variable básica en el renglón 3. El hecho de que el renglón 3 fue el ganador de la prueba del cociente ilustra la regla siguiente.

¿En cuál renglón la variable entrante se vuelve básica?

Siempre transforme a la variable entrante en una variable básica en un renglón que gane la prueba del cociente (los empates se pueden romper de manera arbitraria).

Para hacer x_1 una variable básica en el renglón 3 se aplican las operaciones elementales con los renglones para que x_1 tenga un coeficiente 1 en el renglón 3 y un coeficiente cero en todos los otros renglones. Este procedimiento se llama **pivoteo** en el renglón 3, y el renglón 3 es el **renglón de pivoteo**. El resultado final es que x_1 reemplaza a s_3 como variable básica para el renglón 3. El término del renglón pivote en el que se encuentra la variable básica de entrada recibe el nombre de **término pivote**. Se procede como se hizo cuando se estudió el método de Gauss-Jordan en el capítulo 2; se convierte a x_1 en una variable básica en el renglón 3 efectuando ciertas OER.

OER 1 Se genera un coeficiente 1 para x_1 en el renglón 3 cuando se multiplica el renglón 3 por $\frac{1}{2}$. El renglón resultante (marcado con una prima para indicar que es la primera iteración) es

$$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4 \qquad \text{(renglón 3')}$$

OER 2 Para obtener un coeficiente cero para x_1 en el renglón 0 se reemplaza el renglón 0 con 60(renglón 3′) + renglón 0.

$$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240 \qquad \text{(renglón 0')}$$

OER 3 Para crear un coeficiente cero para x_1 en el renglón 1 se reemplaza el renglón 1 por −8(renglón 3′) + renglón 1.

$$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16 \qquad \text{(renglón 1')}$$

OER 4 Para obtener un coeficiente cero para x_1 en el renglón 2 se reemplaza el renglón 2 con −4(renglón 3′) + renglón 2.

$$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4 \qquad \text{(renglón 2')}$$

Como x_1 no se encuentra en el renglón 4, no es necesario ejecutar un OER para eliminar x_1 del renglón 4. Por lo tanto, ya se podría escribir el "nuevo" renglón 4 (se le llama renglón 4′ para que haya consistencia con la otra notación) como

$$x_2 + s_4 = 5 \qquad \text{(renglón 4')}$$

Al poner juntos los renglones 0′a 4′ se obtiene la forma canónica que se ilustra en la tabla 6.

Al buscar una variable básica en cada renglón de la forma canónica actual se tiene que

$$\text{VB} = \{z, s_1, s_2, \mathbf{x}_1, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{\mathbf{s}_3, x_2, x_3\}$$

Por tanto, la forma canónica 1 genera la solución factible básica $z = 240, s_1 = 16, s_2 = 4, x_1 = 4, s_4 = 5, x_2 = x_3 = s_3 = 0$. Se podría haber pronosticado que el valor de z en la forma canónica 1 sería de 240 con base en el hecho de que por cada unidad que crece x_1 se incrementa z en 60. Como x_1 creció 4 unidades (desde $x_1 = 0$ hasta $x_1 = 4$), se esperaría que

$$\begin{aligned}\text{Valor de } z \text{ en la forma canónica 1} &= \text{valor inicial de } + 4(60)\\ &= 0 + 240 = 240\end{aligned}$$

TABLA 6
Forma Crónica 1

Renglón		Variable Básica
Renglón 0′	$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$	$z = 240$
Renglón 1′	$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
Renglón 2′	$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
Renglón 3′	$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$
Renglón 4′	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Al obtener la forma canónica 1 a partir de la forma canónica inicial, se ha pasado desde una sfb a una sfb mejor (un valor z mayor). Observe que la sfb inicial y la sfb mejorada son adyacentes. Esto se infiere porque las dos soluciones factibles básicas tienen $4 - 1 = 3$ variables básicas (s_1, s_2, y s_4) en común (sin incluir a z, la cual es una variable básica en cada forma canónica). Por consiguiente, se observa que al pasar de una forma canónica a la siguiente, se ha procedido desde una sfb a un sfb adyacente mejor. El procedimiento para pasar desde una sfb a una sfb adyacente mejor se llama **iteración** (o algunas veces, *pivoteo*) del algoritmo simplex.

Ahora se intentará hallar una sfb que tenga un valor z más grande. Se empieza por examinar la forma canónica 1 (tabla 6) para determinar si es posible incrementar z aumentando el valor de alguna variable no básica (pero conservando las otras variables no básicas iguales a cero). Al reacomodar el renglón 0′ para encontrar el valor de z se tiene

$$z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3 \tag{11}$$

En (11) se observa que al incrementar la variable no básica x_2 en 1 (pero conservando $x_3 = s_3 = 0$) se reduce z en 15. ¡Pero eso no es lo que queremos! Al incrementar la variable no básica s_3 en 1 (pero conservando $x_3 = s_3 = 0$), z disminuye en 30. Tampoco es lo que queremos. Por otro lado, al incrementar x_3 en 1 (conservando $x_2 = s_3 = 0$) se incrementa z en 5. Por lo tanto, decidimos que x_3 entre a la base. Recuerde que la regla para determinar la variable entrante es seleccionar la variable con el coeficiente más negativo en el renglón 0 actual. Como x_3 es la única variable con un coeficiente negativo en el renglón 0′, entonces debe entrar a la base.

Al hacer crecer x_3 en 1 se incrementa z en 5, así que ésta es la ventaja para hacer x_3 tan grande como sea posible. Se puede incrementar x_3 con la condición de que las variables básicas actuales (s_1, s_2, x_1, y s_4) se conserven no negativas. Para determinar qué tan grande puede ser x_3, tenemos que conocer los valores de las variables básicas en términos de x_3 (pero conservando $x_2 = s_3 = 0$). Se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
&\text{Del renglón } 1'\text{: } s_1 = 16 + x_3\\
&\text{Del renglón } 2'\text{: } s_2 = 4 - 0.5x_3\\
&\text{Del renglón } 3'\text{: } x_1 = 4 - 0.25x_3\\
&\text{Del renglón } 4'\text{: } s_4 = 5
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones indican que $s_1 \geq 0$ y $s_4 \geq 0$ se conservarán para todos los valores de x_3. A partir del renglón 2′ se tiene que $s_2 \geq 0$ se cumple si $4 - 0.5x_3 \geq 0$, o $x_3 \leq \frac{4}{0.5} = 8$. A partir del renglón 3′ $x_1 \geq 0$ se cumple si $4 - 0.25x_3 \geq 0$, o $x_3 \leq \frac{4}{0.25} = 16$. Esto demuestra que lo más grande que puede ser x_3 es min $\{\frac{4}{0.5}, \frac{4}{0.25}\} = 8$. Este hecho se pudo descubrir también mediante (10) y la prueba del cociente como se señala:

Renglón 1′: sin cociente (x_3 tiene coeficiente negativo en el renglón 1)

Renglón 2′: $\dfrac{4}{0.5} = 8$

Renglón 3′: $\dfrac{4}{0.25} = 16$

Renglón 4′: sin cociente (x_3 tiene un coeficiente no positivo en el renglón 4)

Por consiguiente, el cociente más pequeño se presenta en el renglón 2′, por lo que este renglón gana la prueba del cociente. Esto quiere decir que se deben efectuar OER para hacer que x_3 sea una variable básica en el renglón 2′.

OER 1 Se genera un coeficiente 1 para x_3 en el renglón 2′ al reemplazar el renglón 2′ por 2(renglón 2′):

$$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 \tag{renglón 2″}$$

OER 2 Se genera un coeficiente 0 para x_3 en el renglón 0′ al reemplazar el renglón 0′ por 5(renglón 2)″ + renglón 0′:

$$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280 \tag{renglón 0″}$$

TABLA 7
Forma canónica 2

Renglón		Variable Básica
0″	$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1″	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2″	$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3″	$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
4″	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

OER 3 Se encuentra un coeficiente 0 para x_3 en el renglón 1′ al reemplazar el renglón 1′ por renglón 2″ + renglón 1′:

$$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24 \qquad \text{(renglón 1″)}$$

OER 4 Se determina un coeficiente 0 para x_3 en el renglón 3′ al reemplazar el renglón 3′ por $-\frac{1}{4}$(renglón 2″) + 3′:

$$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2 \qquad \text{(renglón 3″)}$$

Puesto que x_3 ya tiene un coeficiente cero en el renglón 4′, se puede escribir

$$x_2 + s_4 = 5 \qquad \text{(renglón 4″)}$$

Al combinar los renglones 0″ a 4″ se obtiene la forma canónica mostrada en la tabla 7.

Al buscar una variable básica en cada renglón de la forma canónica 2 se encuentra

$$\text{VB} = \{z, s_1, x_3, x_1, s_4\} \quad \text{y} \quad \text{VNB} = \{s_2, s_3, x_2\}$$

La forma canónica 2 genera la sfb siguiente: $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $s_4 = 5$, $s_2 = s_3 = x_2 = 0$. Se podría haber pronosticado que la forma canónica tendría $z = 280$ con base en el hecho de que cada unidad de la variable entrante x_3 incrementó a z en 5, y se ha incrementado x_3 en 8 unidades. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Valor } z \text{ de la forma canónica } 2 &= \text{valor } z \text{ de la forma canónica } 1 + 8(5)\\ &= 240 + 40 = 280\end{aligned}$$

Como las sfb para las formas canónicas 1 y 2 tienen (sin incluir a z) $4 - 1 = 3$ variables básicas en común (s_1, s_4, x_1), son soluciones factibles básicas adyacentes.

Como ya se terminó la segunda iteración (o pivoteo) del algoritmo simplex, se examina la forma canónica 2 para ver si es posible encontrar una sfb mejor. Si se reacomoda el renglón 0″ y se despeja z se obtiene

$$z = 280 - 5x_2 - 10s_2 - 10s_3 \qquad (12)$$

A partir de (12) se observa que al incrementar x_2 en 1 (pero conservando $s_2 = s_3 = 0$) disminuye z en 5; al incrementar s_2 en 1 (pero conservando $s_3 = x_2 = 0$) disminuye z en 10; al incrementar s_3 en 1 (pero conservando $x_2 = s_2 = 0$) disminuye z en 10. Por consiguiente, al aumentar cualquier variable no básica, se propicia que z disminuya. Lo anterior podría hacernos pensar que la sfb actual a partir de la forma canónica 2 es una solución óptima. ¡Y es lo correcto! Para ver por qué, examinemos (12). Ya sabemos que cualquier solución factible para el problema de los muebles de Dakota debe tener $x_2 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, and $s_3 \geq 0$, y $-5x_2 \leq 0$, $-10s_2 \leq 0$, y $-10s_3 \leq 0$. Cuando se combinan estas desigualdades con (12) es evidente que cualquier solución factible debe tener $z = 280$ + términos que son ≤ 0 y $z \leq 280$. Nuestra sfb actual tiene $z = 280$, así que debe ser óptima.

El razonamiento que se usó para demostrar que la forma canónica 2 es óptima, giraba alrededor del hecho de que cada una de sus variables no básicas tenía un coeficiente no negativo en el renglón 0". Esto quiere decir que podemos determinar si una sfb de una forma canónica es óptima mediante la aplicación de la regla simple siguiente:

¿Es una forma canónica óptima (problema de maximización)?

Una forma canónica es óptima (en el caso de un problema de maximización) si cada variable no básica tiene un coeficiente no negativo en el renglón 0 de la forma canónica.

OBSERVACIONES

1 El coeficiente de una variable de decisión en el renglón 0 se conoce a menudo como el **costo reducido** de la variable. Por lo tanto, en la forma canónica óptima, los costos reducidos para x_1 y x_3 son 0, y el costo reducido para x_2 es 5. El costo reducido de una variable no básica es la cantidad en que disminuirá el valor de z si se incrementa el valor de la variable no básica en 1 (pero todas las otras variables no básicas siguen siendo iguales a cero). Por ejemplo, el costo reducido para la variable "mesas" (x_2) en la forma canónica 2 es 5. A partir de (12) se observa que al incrementar x_2 en 1, z disminuye en 5. Nótese que como todas las variables básicas (excepto z, naturalmente) deben tener coeficientes cero en el renglón 0, el costo reducido para una variable básica será siempre 0. El concepto de los costos reducidos se analiza con mayores detalles en los capítulos 5 y 6.

Estos comentarios son correctos sólo si los valores de todas las variables básicas siguen siendo no negativos después de que la variable no básica creció 1. Cuando x_2 crece 1, x_1, x_3 y s_1 son no negativas, por lo que el comentario es válido.

2 Se observa en la forma canónica 2 que la solución óptima al problema de los muebles de Dakota es fabricar 2 escritorios ($x_1 = 2$) y 8 sillas ($x_3 = 8$). Como $x_2 = 0$, ninguna mesa se debe fabricar. Asimismo, $s_1 = 24$ es razonable porque se están usando sólo $8 + 8(2) = 24$ pies tablón de madera. Por tanto, no se están usando $48 - 24 = 24$ pies tablón de madera. De igual manera, $s_4 = 5$ tiene sentido porque, aunque hasta 5 mesas se podrían haber fabricado, en realidad se producen 0 mesas. Por tanto, la holgura en la restricción 4 es $5 - 0 = 5$ Como $s_2 = s_3 = 0$, todas las horas disponibles de acabado y de carpintería se utilizan, así que las restricciones de acabado y de carpintería son activas.

3 Escogimos que la variable entrante sea la que tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, pero esto no siempre lleva rápidamente a la sfb óptima (véase problema de repaso 11). En la realidad, incluso si se selecciona la variable con el coeficiente negativo más pequeño (en valor absoluto), el algoritmo simplex encontrará finalmente la solución óptima del PL.

4 Aunque se podría escoger cualquier variable con un coeficiente negativo en el renglón 0 para introducir a la base, es necesario seleccionar el renglón de pivoteo *mediante* la prueba del cociente. Para demostrarlo formalmente suponga que se ha escogido a x_i para que entre a la base y en la descripción actual x_i es una variable básica en el renglón k. Entonces, el renglón k se podría escribir como

$$\overline{a}_{ki}x_i + \cdots = \overline{b}_k$$

Considere cualquier otra restricción (por ejemplo, el renglón j) en la forma canónica. El renglón j en la forma canónica actual se podría expresar como

$$\overline{a}_{ji}x_i + \cdots = \overline{b}_j$$

Si se toma como pivote el renglón k, éste se vuelve

$$x_i + \cdots \quad = \frac{\overline{b}_k}{\overline{a}_{ki}}$$

El nuevo renglón j después del pivoteo se obtiene al sumar $-\overline{a}_{ji}$ veces la última ecuación al renglón j de la forma canónica actual. Así se genera el nuevo renglón j

$$0x_i + \cdots \quad = \overline{b}_j - \frac{\overline{b}_k\overline{a}_{ji}}{\overline{a}_{ki}}$$

Ya sabemos que después del pivoteo cada restricción debe tener un segundo miembro no negativo. Por consiguiente, $\overline{a}_{ki} > 0$ debe cumplirse para asegurar que el renglón k tiene un lado derecho no negativo después del pivoteo. Suponga que $\overline{a}_{ji} > 0$. Luego, para asegurar que el renglón j tenga un lado derecho no negativo después del pivoteo, se debe tener

$$\frac{\overline{b}_j - \overline{b}_k\overline{a}_{ji}}{\overline{a}_{ki}} \geq 0$$

o bien, (porque $\overline{a}_{ji} > 0$)

$$\frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{ji}} \geq \frac{\overline{b}_k}{\overline{a}_{ki}}$$

Por lo tanto, el renglón k debe ser un "ganador" de la prueba del cociente para asegurar que el renglón j tenga un lado derecho no negativo después de finalizar el pivoteo.

Si $\bar{a}_{ji} \leq 0$, entonces el lado derecho del renglón j será con toda seguridad no negativo después del pivoteo. Esto se infiere porque

$$-\frac{\bar{b}_k \bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}} \geq 0$$

se conserva ahora.

Como se prometió antes, se ha esbozado un algoritmo que procede desde una sfb hasta una sfb mejor. El algoritmo se detiene cuando se determina una solución óptima. La convergencia del algoritmo simplex se analiza en la sección 4.11.

Resumen del algoritmo simplex para un problema de maximización

Paso 1 Convierta la PL en una forma estándar.

Paso 2 Encuentre una solución factible básica. Es fácil si todas las restricciones son $\leq$ con los respectivos lados derechos de las restricciones no negativos. Luego la variable de holgura s_i se puede usar como la variable básica para el renglón i. Si no hay sfb evidentes, entonces se aplican las técnicas estudiadas en las secciones 4.12 y 4.13 para encontrar un sfb.

Paso 3 Si todas las variables no básicas tienen coeficientes no negativos en el renglón 0, entonces la sfb actual es óptima. Si algunas variables en el renglón 0 tienen coeficientes negativos, entonces seleccione la variable con el coeficiente más negativo en el renglón 0 para introducirla en la base. Esta variable recibe el nombre de *variable entrante*.

Paso 4 Efectúe OER con el fin de convertir a la variable entrante en variable básica en cualquier renglón que gane la prueba del cociente (los empates se rompen en forma arbitaria eligiendo a cualquier candidato). Después de que las OER se aplicaron para generar una forma canónica nueva, regrese al paso 3, usando la forma canónica actual.

Cuando utilice el algoritmo simplex para resolver problemas, nunca debe haber una restricción con el lado derecho negativo (es correcto para el renglón 0 tener el lado derecho negativo; véase la sección 4.6). Una restricción con el lado derecho negativo es por lo regular el resultado de un error en la prueba del cociente o al ejecutar una o más OER. Si una (o más) de las restricciones tiene un lado derecho negativo, entonces ya no hay una sfb, y las reglas del algoritmo simplex no darán lugar a una sfb mejor.

Representación de los tableaus simplex

En lugar de escribir cada variable en cada restricción, se usa con frecuencia un acomodo resumido que se llama **tableau simplex.** Por ejemplo, la forma canónica

$$\begin{aligned} z + 3x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 3 \end{aligned}$$

se escribiría en la forma abreviada que se ilustra en la tabla 8 (rhs = *right-hand side*, lado derecho, ld). Este formato facilita detectar variables básicas: sólo busque las columnas que tengan una sola entrada de 1 y todas las otras entradas iguales a cero (s_1 y s_2). Al usar los arreglos simplex, se encerrará el término pivote en un círculo y se denotará al ganador de la prueba del cociente mediante un *.

TABLA 8
Un tableau simplex

z	x_1	x_2	s_1	s_2	del	Variable básica
1	3	1	0	0	6	$z_2 = 6$
0	1	0	1	0	4	$s_1 = 4$
0	2	1	0	1	3	$s_2 = 3$

PROBLEMAS

Grupo A

1 Utilice el algoritmo simplex para resolver el problema de Giapetto (ejemplo 1 del capítulo 3).

2 Aplique el algoritmo simplex para determinar la solución del siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3 Aplique el algoritmo simplex para solucionar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 &\le 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

4 Suponga que usted desea resolver el problema de Dorian (ejemplo 2 del capítulo 3) mediante el algoritmo simplex. ¿Qué dificultad podría haber?

5 Utilice el algoritmo simplex para resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ + x_1 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

6 Utilice el algoritmo simplex para resolver el PL siguiente

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

7 La recomendación ha sido que en cada iteración del algoritmo simplex, la variable entrante debe ser (en un problema de maximización) la que cause el mayor incremento en la función objetivo. Aunque esto ocasiona por lo regular menos pivoteos que con la regla para introducir al elemento más negativo del renglón 0, la regla del mayor incremento apenas si se usa. ¿Por qué no?

4.6 Solución de problemas de minimización mediante el algoritmo simplex

Hay dos maneras distintas para que, mediante el algoritmo simplex, se solucionen problemas de minimización. Se ilustran estos métodos con la resolución de la PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(PL 2)}$$

Método 1

La solución óptima para el PL 2 es el punto (x_1, x_2) en la región factible para el PL 2 que hace a $z = 2x_1 - 3x_2$ el mínimo. En forma equivalente se podría decir que la solución óptima para el PL 2 es el punto en la región factible que hace a $-z = -2x_1 + 3x_2$ el máximo. Esto significa que es posible encontrar la solución óptima para el PL 2 al resolver el PL 2':

$$\begin{aligned} \max -z = &-2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(PL 2')}$$

Se usará $-z$ como la variable básica para el renglón 0 para la resolución de la PL 2'. Después de añadir las variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones, se obtiene el tableau inicial de la tabla 9. Como x_2 es la única variable con un coeficiente negativo en el renglón 0, entonces se la introduce a base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en la primera restricción, renglón 1. El tableau resultante se presenta en la tabla 10. Como cada variable en el renglón 0 tiene un coeficiente no negativo éste es un tableau óptimo. Por lo tanto, la solución óptima para el PL 2' es $-z = 12, x_2 = 4, s_2 = 10, x_1 = s_1 = 0$. Entonces, la solución óptima para la PL 2 es $z = -12, x_2 = 4, s_2 = 10, x_1 = s_1 = 0$. Al sustituir los valores de x_1 y de x_2 en la función objetivo del PL 2 se tiene

$$z = 2x_1 - 3x_2 = 2(0) - 3(4) = -12$$

En resumen, multiplique la función objetivo del problema de minimización por -1 y resuelva el problema como si fuera un problema de maximización con función objetivo $-z$. La solución óptima para el problema de maximización le dará a usted la solución óptima para el problema de minimización. Recuerde que (valor z óptimo para el problema de minimización) = $-$(valor z óptimo de la función objetivo para el problema de maximización).

Método 2

Es posible efectuar una simple modificación en el algoritmo simplex para poder resolver de modo directo problemas de minimización. Modifique el paso 3 como sigue: si todas las variables no básicas del renglón 0 tienen coeficientes no positivos, entonces la sfb actual es

TABLA 9
Tableau inicial para el PL 2. Método 1

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	2	-3	0	0	0	$-z = 0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4^*$
0	1	-1	0	1	6	$s_2 = 6$	Ninguno

TABLA 10
Tableau óptimo para el PL 2. Método 1

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica
1	5	0	3	0	12	$-z = 12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

TABLA 11

Tableau inicial para la PL 2. Método 2

z	x_1	x_2	s_1	s_2	L	Variable básica	Cociente
1	-2	3	0	0	0	$z = 0$	
0	1	①	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4^*$
0	1	-1	0	1	6	$s_2 = 6$	Ninguno

TABLA 12

Tableau óptimo para el PL 2. Método 2

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica
1	-5	0	-3	0	-12	$z = -12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

óptima. Si cualquier variable no básica en el renglón 0 tiene coeficiente positivo, seleccione la variable con el coeficiente "más positivo" en el renglón 0 para que entre a la base.

Esta modificación del algoritmo simplex funciona porque al incrementar una variable no básica con un coeficiente positivo en el renglón 0 *disminuirá* z. Si se usa este método para resolver PL 2, entonces el arreglo inicial será el que se ilustra en la tabla 11. Como x_2 tiene el coeficiente más positivo en el renglón 0, se introduce x_2 a la base. La prueba del cociente señala que x_2 debe entrar a la base en el renglón 1, lo que da como resultado la tabla 12. Como cada variable en el renglón 0 tiene coeficiente no positivo, éste es un arreglo óptimo.† Por lo tanto, la solución óptima para el PL 2 (como ya se vio) es $z = -12$, $x_2 = 4$, $s_2 = 10$, $x_1 = s_1 = 0$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 8x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

†Para ver que este tableau es óptimo, obsérvese que a partir del renglón 0, $z = -12 + 5x_1 + 3s_1$. Puesto que $x_1 \geq 0$ y $s_1 \geq 0$, esto demuestra que $z \geq -12$. Por lo tanto, la sfb actual (que tiene $z = -12$) debe ser óptima.

4.7 Soluciones óptimas alternas

Refiérase al ejemplo 3 de la sección 3.3. Recuerde que para algunos PL, más de un punto extremo es óptimo. Si un PL tiene más de una solución óptima, entonces se dice que tiene **soluciones óptimas alternas** o múltiples. Enseguida se explica cómo el algoritmo simplex se puede aplicar para determinar si un PL tiene soluciones óptimas alternas.

Reconsidere el ejemplo de los muebles Dakota de la sección 4.3 con la modificación de que las mesas se venden en 35 dólares en lugar de 30 (véase tabla 13). Como x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, se introduce x_1 a la base. La prueba del cociente señala que x_1 debe entrar en el tableau 3. Ahora sólo x_3 tiene coeficiente negativo en el renglón 0, así que x_3 entra a la base (véase tabla 14). La prueba del cociente indica que x_3 debe entrar a la base en el renglón 2. El tableau resultante óptimo se presenta en la tabla 15. Al igual que en la sección 4.3, este arreglo indica que la solución óptima para los muebles Dakota es $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $s_4 = 5$, y $x_2 = s_2 = s_3 = 0$.

TABLA 13
Tableau inicial para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Ld	Variable básica	Cociente
1	−60	−35	−20	0	0	0	0	0	$z = 0$	
0	8	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	$\frac{48}{8} = 6$
0	4	2	1.5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	$\frac{20}{4} = 5$
0	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	$s_3 = 8$	$\frac{8}{2} = 4^*$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	Ninguno

TABLA 14
Primer tableau para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	10	−5	0	0	30	0	240	$z = 240$	
0	0	0	−1	1	0	−4	0	16	$s_1 = 16$	Ninguno
0	0	−1	0.5	0	1	−2	0	4	$s_2 = 4$	$\frac{4}{0.5} = 8^*$
0	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	$x_1 = 4$	$\frac{4}{0.25} = 16$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	Ninguno

TABLA 15
Segundo tableau (óptimo) para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Ld	Variable básica
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	0	−2	0	1	2	−8	0	24	$s_1 = 24$
0	0	−2	1	0	2	−4	0	8	$x_3 = 8$
0	1	1.25	0	0	−0.5	1.5	0	2	$x_1 = 2^*$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$

TABLA 16

Otro tableau óptimo para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	sm	Variable Básica
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	1.6	0	0	1	1.2	−5.6	0	27.2	$s_1 = 27.2$
0	1.6	0	1	0	1.2	−1.6	0	11.2	$x_3 = 11.2$
0	0.8	1	0	0	−0.4	1.2	0	1.6	$x_2 = 1.6$
0	−0.8	0	0	0	0.4	−1.2	1	3.4	$s_4 = 3.4$

Recuerde que todas las variables básicas deben tener coeficiente cero en el renglón 0 (de otro modo, no serían variables básicas). No obstante, en el arreglo óptimo, hay una variable no básica, x_2, que también tiene coeficiente cero en el renglón 0. Veamos qué sucede si entra x_2 en la base. La prueba del cociente señala que x_2 debe entrar a la base en el renglón 3 (compruébelo). Este arreglo resultante se da en la tabla 16. Lo que es importante observar es que *como x_2 tiene coeficiente cero en el renglón 0 del arreglo óptimo, el pivote que introduce a x_2 en la base no cambia el renglón 0*. Esto quiere decir que todas las variables en el nuevo renglón 0 tendrán todavía coeficientes no negativos. Por tanto, el nuevo arreglo también es óptimo. Puesto que el pivote no modificó el valor de z, una solución óptima alterna para el ejemplo de Dakota es $z = 280$, $s_1 = 27.2$, $x_3 = 11.2$, $x_2 = 1.6$, $s_4 = 3.4$ y $x_1 = s_3 = s_2 = 0$.

En resumen, si las mesas se venden en 35 dólares, Dakota puede obtener 280 dólares como ingresos por las ventas mediante la manufactura de 2 escritorios y 8 sillas, o bien, con la producción de 1.6 mesas y 11.2 sillas. Por lo tanto, Dakota tiene puntos extremos óptimos múltiples (o alternos).

Como se estableció en el capítulo 3, se puede demostrar que cualquier punto en el segmento de recta que une dos puntos extremos óptimos también será óptimo. Para ilustrar esta idea, se expresarán los dos puntos extremos óptimos:

$$\text{Punto extremo óptimo } 1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Punto extremo óptimo } 2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, para $0 \le c \le 1$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + (1 - c)\begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 1.6 - 1.6c \\ 11.2 - 3.2c \end{bmatrix}$$

será óptimo. Esto demuestra que aunque el ejemplo de Dakota tiene sólo dos puntos extremos óptimos, hay una cantidad infinita de soluciones óptimas para el problema de Dakota. Por ejemplo, al escoger $c = 0.5$ se obtiene la solución óptima $x_1 = 1$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 9.6$.

Si no hay variable básica con un coeficiente cero en el renglón 0 del tableau óptimo, entonces el PL tiene una solución óptima única (véase problema 3). A veces es posible que hasta cuando hay una variable no básica con un coeficiente cero en el renglón 0 del tableau óptimo el PL no tenga soluciones óptimas alternativas (véase el problema de repaso 25).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que si un soldado de juguete se vendiera en 28 dólares, entonces el problema de Giapetto tendría soluciones óptimas alternas.

2 Demuestre que el PL siguiente tiene soluciones óptimas alternas; encuentre tres de ellas.

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3 Encuentre soluciones óptimas alternas para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_3 \leq 1 \\ & \text{Toda } x_i \geq 0 \end{aligned}$$

4 Determine todas las soluciones óptimas alternas para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & \text{Toda } x_i \geq 0 \end{aligned}$$

5 ¿Cuántos soluciones básicas factibles tiene el siguiente problema lineal?

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ & \text{Toda } x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Grupo B

6 Suponga que ha encontrado este tableau óptimo (tabla 17) para un problema de maximización. Aplique el hecho de que toda variable no básica tiene un coeficiente rigurosamente positivo en el renglón 0 para demostrar que $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $s_1 = s_2 = 0$ es la única solución óptima para este PL. (*Sugerencia*: ¿Puede cualquier punto extremo que tiene $s_1 > 0$ o $s_2 > 0$ tener $z = 10$?)

7 Explique por qué el conjunto de soluciones óptimas de un PL es un conjunto convexo.

8 Considere un PL con el tableau óptimo de la tabla 18.

a ¿Tiene este PL más de una sfb que sea óptima?

b ¿Cuántas soluciones óptimas tiene este PL? (*Sugerencia*: Si el valor de x_3 aumenta, entonces cómo cambian los valores de las variables básicas y el valor z?

9 Caracterice todas las soluciones óptimas del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= -8x_5 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ & x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5 \\ & \text{Toda } x_i \geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 17

z	x_1	x_2	s_1	s_2	ld
1	0	0	2	3	10
0	1	0	3	2	4
0	0	1	1	1	3

TABLA 18

z	x_1	x_2	x_3	x_4	ld
1	0	0	0	2	2
0	1	0	−1	1	2
0	0	1	−2	3	3

4.8 PL no acotados

En la sección 3.3 se mencionó que para algunos PL existen puntos en la región factible para los cuales z asume valores arbitrariamente grandes (en los problemas de maximización) o arbitrariamente pequeños (en los problemas de minimización). Cuando se presenta esta situación, se dice que el PL es no acotado. En esta sección se explica cómo se aplica el algoritmo simplex para determinar si un PL es no acotado.

EJEMPLO 3 Breadco Bakeries: Un PL no acotado

Breadco Bakeries elabora dos clases de pan: *baguette* y pan negro. Cada *baguette* se vende en 36 centavos y cada hogaza de pan negro se vende en 30 centavos. Para elaborar una *baguette* se requieren 1 paquete de levadura y 6 onzas de harina; para el pan negro se requieren 1 paquete de levadura y 5 onzas de harina. Breadco tiene en la actualidad 5 paquetes de levadura y 10 onzas de harina. Se pueden comprar más paquetes de levadura a 3 centavos cada uno y harina a 4 centavos la onza. Plantee y resuelva un PL con el que se pueda maximizar la utilidad de Breadco (= ingresos – costos).

Solución Defina

x_1 = número de *baguettes* horneadas

x_2 = número de hogazas de pan negro horneadas

x_3 = número de paquetes de levaduras comprados

x_4 = número de onzas de harina compradas

Entonces, el objetivo de Breadco es maximizar z = ingresos – costos, donde

$$\text{Ingresos} = 36x_1 + 30x_2 \quad \text{y} \quad \text{Costos} = 3x_3 + 4x_4$$

Por lo tanto, la función objetivo de Breadco es

$$\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

Breadco se enfrenta a las restricciones siguientes:

Restricción 1 Número de paquetes de levadura usados para elaborar el pan, no puede exceder la levadura disponible más la levadura comprada.

Restricción 2 Las onzas de harina para elaborar el pan no pueden exceder la harina disponible más la harina comprada.

Como

$$\text{Levadura disponible} + \text{levadura comprada} = 5 + x_3$$
$$\text{Harina disponible} + \text{harina comprada} = 10 + x_4$$

La restricción 1 se podría expresar como

$$x_1 + x_2 \le 5 + x_3 \quad \text{o bien,} \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 5$$

y la restricción 2 se podría escribir como

$$6x_1 + 5x_2 \le 10 + x_4 \quad \text{o bien} \quad 6x_1 + 5x_2 - x_4 \le 10$$

Si se suman las restricciónes $x_i \ge 0$ (i = 1, 2, 3, 4) se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4 & \\ \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 5 & \quad \text{(Restricción de la levadura)} \\ 6x_1 + 5x_2 - x_4 \le 10 & \quad \text{(Restricción de la harina)} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & \end{aligned}$$

Al agregar las variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones se obtiene el tableau de la tabla 19.

TABLA 19
Tableau initial para Breadco

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−36	−30	3	4	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	−1	0	1	0	5	$s_1 = 5$	$\frac{5}{1} = 5$
0	6	5	0	−1	0	1	10	$s_2 = 10$	$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$*

TABLA 20
Primer tableau de Breadco

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	0	3	-2	0	6	60	$z = 60$	
0	0	$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{10}{3}$	$s_1 = \frac{10}{3}$	$(\frac{10}{3})/(\frac{1}{6}) = 20^*$
0	1	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$	$s_2 = \frac{5}{3}$	Ninguno

TABLA 21
Segundo tableau para Breadco

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	sm	Variable Básica	Cociente
1	0	2	-9	0	12	4	100	$z = 100$	
0	0	1	-6	1	6	-1	20	$x_4 = 20$	Ninguno
0	1	1	-1	0	1	0	5	$x_1 = 5$	Ninguno

Como $-36 < -30$, x_1 entra a la base. La prueba del cociente indica que x_1 debe entrar en el renglón 2. La entrada de x_1 a la base en el renglón 2 genera el tableau de la tabla 20. Como x_4 tiene el único coeficiente negativo del renglón 0, entra x_4 a la base. La prueba del cociente señala que x_4 debe entrar a la base en el renglón 1, y el resultado se observa en la tabla 21. Como x_3 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, nos gustaría introducir a x_3 en la base. Pero la prueba del cociente no señala el renglón en el cual x_3 debe entrar a la base. ¿Qué es lo que sucede? Si regresamos a las ideas básicas que nos llevaron a la prueba del cociente, vemos que cuando x_3 se incrementa (conservando las otras variables no básicas iguales a cero), las variables básicas actuales, x_4 y x_1, cambian como se indica:

$$x_4 = 20 + 6x_3 \tag{13}$$

$$x_1 = 5 + x_3 \tag{14}$$

Cuando x_3 se incrementa, aumentan tanto x_4 como x_1. Esto quiere decir que no importa qué tan grande sea x_3, las desigualdades $x_4 \geq 0$ y $x_1 \geq 0$, seguirán siendo válidas, puesto que por cada unidad que se incrementa x_3 aumenta z en 9, es posible encontrar puntos en la región factible para los cuales z asuma un valor arbitrariamente grande. Por ejemplo, ¿se puede encontrar un punto factible con $z \geq 1\,000$? Para lograrlo es necesario incrementar z en $1\,000 - 100 = 900$. Por cada unidad que aumenta x_3, z aumenta 9, por lo que al incrementar x_3 en $\frac{900}{9} = 100$ nos debe dar $z = 1\,000$. Si hacemos $x_3 = 100$ (y se conservan las otras variables no básicas en cero), entonces (13) y (14) muestran que x_4 y x_1 deben ser ahora iguales a

$$x_4 = 20 + 6(100) = 620$$
$$x_1 = 5 + (100) = 105$$

Por lo tanto, $x_1 = 105$, $x_3 = 100$, $x_4 = 620$, $x_2 = 0$ es un punto en la región factible con $z = 1\,000$ Es posible encontrar de modo similar puntos en la región factible que tengan arbitrariamente valores de z grandes. Lo anterior significa que el problema de Breadco es un PL no acotado.

A partir del ejemplo de Breadco se observa que un PL no acotado se presenta en un problema de maximización si hay una variable no básica con coeficiente negativo en el renglón 0, y no hay restricciones que señalen qué tan grande puede llegar a ser la variable no básica. Esta situación ocurrirá cuando una variable no básica (como x_3) tiene un coeficiente negativo en el renglón 0 y coeficientes no positivos en cada restricción. En resumen, *un PL no acotado para un problema de maximización se presenta cuando una variable con coeficiente negativo en el renglón 0 tiene un coeficiente no positivo en cada restricción.*

Si un PL es no acotado, se llega finalmente a un tableau donde uno quiere introducir una variable (como x_3) en la base, pero fracasa la prueba del cociente. Ésta es quizá la manera más fácil de detectar una PL no acotada.

Según se mencionó en el capítulo 3, un PL no acotado es el resultado de un mal planteamiento. En el ejemplo de Breadco, se obtuvo un PL no acotado porque se permitió a Breadco pagar $3 + 6(4) = 27$ centavos por los ingredientes para una *baguette* y luego venderla a 36 centavos. Por lo tanto, cada *baguette* gana una utilidad de 9 centavos. Como las compras ilimitadas de levadura y harina están permitidas, es evidente que el modelo permite a Breadco elaborar tantas *baguettes* como desee, con lo que ganaría utilidades arbitrariamente grandes. Ésta es la causa del PL no acotado.

Desde luego que la formulación del ejemplo de Breadco ignoró varios aspectos de la realidad. Primero, se supuso que la demanda de los productos de Breadco es ilimitada. Segundo, se pasó por alto el hecho de que ciertos recursos para elaborar el pan (como los hornos y la mano de obra) tienen un abastecimiento limitado. Por último, se hizo la suposición irreal de que se podrían comprar cantidades ilimitadas de levadura y harina.

PL no acotados e indicadores de no acotamiento

Considere un PL cuya función objetivo es $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Sea $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \ldots c_n]$. Si el PL es un problema de maximización, entonces el PL será no acotado si y sólo si tiene una dirección de no acotamiento $\mathbf{d}$ que satisface $\mathbf{cd} > 0$. Si el PL es un problema de minimización, entonces el PL será no acotado si y sólo si tiene una dirección de no acotamiento $\mathbf{d}$ que satisface $\mathbf{cd} < 0$. En el ejemplo 3, el último arreglo nos muestra que si se empieza en el punto

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(las variables se listan en el mismo orden que en el tableau), es posible encontrar un indicador de no acotamiento como se indica enseguida. Cada unidad que crece x_3 mantiene la factibilidad si se incrementa x_1 en una unidad y x_4 en seis unidades y se conservan sin cambio a x_2, s_1 y s_2 Puesto que es posible aumentar x_3 sin límite, esto quiere decir que

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un indicador de no acotamiento. Como

$$\mathbf{cd} = [36 \quad 30 \quad -3 \quad -4 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 9$$

ya sabemos que el PL es no acotado. Lo anterior se infiere porque cada vez que nos desplazamos una cantidad en la dirección **d** (dicha cantidad aumenta x_3 en una unidad) se incrementa z en 9, y es posible movernos tanto como queramos en la dirección **d**.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que el PL siguiente es no acotado

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Encuentre un punto en la región factible con $z \geq 10\,000$.

2 Establezca una regla mediante la cual se pueda determinar si un problema de minimización tiene una solución óptima no acotada (es decir, se puede hacer a z arbitrariamente pequeña). Aplique la regla para demostrar que

$$\begin{aligned} \min z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

es un PL no acotado.

3 Suponga que al resolver un PL se obtiene el tableau de la tabla 22. Aunque x_1 puede entrar a la base, este PL es no acotado. ¿Por qué?

4 Resuelva el problema 10 de la sección 3.3 mediante el método simplex.

TABLA 22

z	x_1	x_2	x_3	x_4	sm
1	−3	−2	0	0	0
0	1	−1	1	0	3
0	2	0	0	1	4

5 Demuestre que el PL siguiente es no acotado:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

6 Demuestre que el PL siguiente es no acotado:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.9 El paquete para computadora LINDO

Linus Schrage creó (1986) LINDO (*Linear Interactive and Discrete Optimizer*). Es un paquete para computadora de fácil uso, mediante el cual se pueden resolver problemas de programación lineal, por enteros o cuadrática.† En el apéndice A de este capítulo, se da una breve explicación de cómo se puede usar LINDO para resolver con PL. En esta sección sólo se explica la relación entre la información impresa de los resultados que da LINDO y el análisis del algoritmo simplex.

Empezamos por analizar los resultados que proporciona LINDO para el ejemplo de los muebles Dakota (*véase* figura 6). LINDO permite que el usuario nombre las variables, así que se definen

DESKS = número de escritorios producidos

TABLES = número de mesas fabricadas

CHAIRS = número de sillas producidas

Entonces, la formulación de Dakota en el primer bloque de la figura 6 es

max 60 DESKS + 30 TABLES + 20 CHAIRS (Renglón 1)

†Véanse un análisis de la programación por enteros en el capítulo 9 y de la programación cuadrática en el capítulo 11.

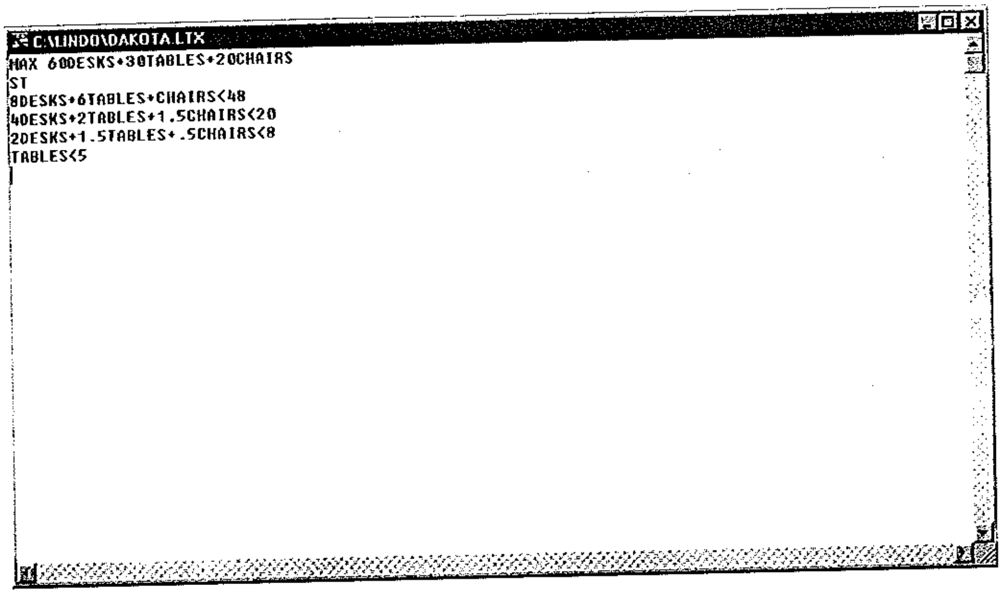

FIGURA 6
Resultados según LINDO para el ejemplo de Dakota

s.a 8 DESKS + 6 TABLES + CHAIRS $\leq$ 48 (Renglón 2) (Limitación de la madera)
4 DESKS + 2 TABLES + 1.5 CHAIRS $\leq$ 20 (Renglón 3) (Limitación del acabado)
2 DESKS + 1.5 TABLES + 0.5 CHAIRS $\leq$ 8 (Renglón 4) (Limitación de la carpintería)
TABLES + $\leq$ 5 (Renglón 5)
DESKS, TABLES, CHAIRS $\geq$ 0

(LINDO supone que todas las variables son no negativas, por lo que las restricciones de no negatividad no se tienen que introducir a la computadora.) Con el fin de ser consistentes con LINDO se ha designado como renglón 1 a la función objetivo, y a las restricciones como renglones 2 a 5.

Para introducir este problema en LINDO, asegúrese que la pantalla tenga una ventana, o área de trabajo, vacía, con "Untitled" en la parte superior del área de trabajo. Si es necesario se abre una nueva ventana mediante la selección de New (Nuevo) en el menú File (archivo), o presionando el botón de New File (Nuevo archivo).

El primer enunciado en un modelo LINDO es siempre el objetivo. Se introduce el objetivo casi como usted lo escribiría en forma de ecuación:

MAX 60 DESKS + 30 TABLES + 20 CHAIRS

Esto le dice a LINDO que maximice la función objetivo. Proceda con la introducción de las restricciones como sigue:

SUBJECT TO (OR s.a)
8 DESKS + 6 TABLES + CHAIRS < 48
4 DESKS + 2 TABLES + 1.5 CHAIRS < 20
2 DESKS + 1.5 TABLES + .5 CHAIRS < 8
TABLES < 5

Ahora su pantalla lucirá como la de la figura 6. Observe que LINDO supone en forma automática que todas las variables de decisión son no negativas.

Dakota

Para guardar el archivo y poderlo usar después, seleccione Save (Guardar) en el menú File (Archivo) y cuando pregunte por un nombre de archivo reemplace el símbolo * por un nombre que usted escoja (escogimos *Dakota*). No escriba sobre los caracteres .LTX. Enseguida podría usar el comando File Open (abrir archivo) para regresar al problema.

Para resolver el modelo se procede de la siguiente manera:

1 Seleccione la orden Solve en el menú Solve (Resolver) o dé un clic en el botón con un ojo de buey.

```
Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP        2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       280.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     DESKS        2.000000           0.000000
    TABLES        0.000000           5.000000
    CHAIRS        8.000000           0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)       24.000000           0.000000
        3)        0.000000          10.000000
        4)        0.000000          10.000000
        5)        5.000000           0.000000

 NO. ITERATIONS=        2
```

FIGURA 7

2 Cuando pregunte si usted desea un intervalo (análisis de sensibilidad), escoja No. Se explica cómo interpretar un intervalo o análisis de sensibilidad en el capítulo 6.

3 Cuando esté terminada la solución, aparecerá una pantalla que muestra el estado del comando Solve. Después de revisar la información mostrada, seleccione Close (Cerrar).

4 Ahora usted debe ver la información que introdujo en una ventana que se llama "Reports Window". Dé un clic en cualquier parte de esta ventana, y sus datos desaparecerán del primer plano. Desplácese hasta la parte superior de la ventana usando la flecha única de la parte derecha de la pantalla, y enseguida ésta se verá como la de la figura 7.

Los resultados de LINDO en la figura 7 indican

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

lo que señala que LINDO encontró la solución óptima después de dos iteraciones (o pivoteos) del algoritmo simplex.

OBJECTIVE FUNCTION VALUE 280.000000

indica que el valor de z óptimo es 280.

VALUE

da el valor de la variable en la solución óptima del PL. Por lo tanto, la solución óptima le recomienda a Dakota producir 2 escritorios, 0 mesas y 8 sillas.

SLACK OR SURPLUS

proporciona el valor de holgura o excedente en la solución óptima. Por lo tanto,

$$s_1 = \text{holgura para el renglón 2 en el resultado de LINDO} = 24$$
$$s_2 = \text{holgura para el renglón 3 en el resultado de LINDO} = 0$$
$$s_3 = \text{holgura para el renglón 4 en el resultado de LINDO} = 0$$
$$s_4 = \text{holgura para el renglón 5 en el resultado de LINDO} = 5$$

REDUCED COST

proporciona el coeficiente de la variable en el renglón 0 del arreglo óptimo (en un problema de maximización). Según lo que se trató en la sección 4.3, el costo reducido para cada variable básica debe ser 0. En el caso de una variable no básica x_j, el costo reducido es la

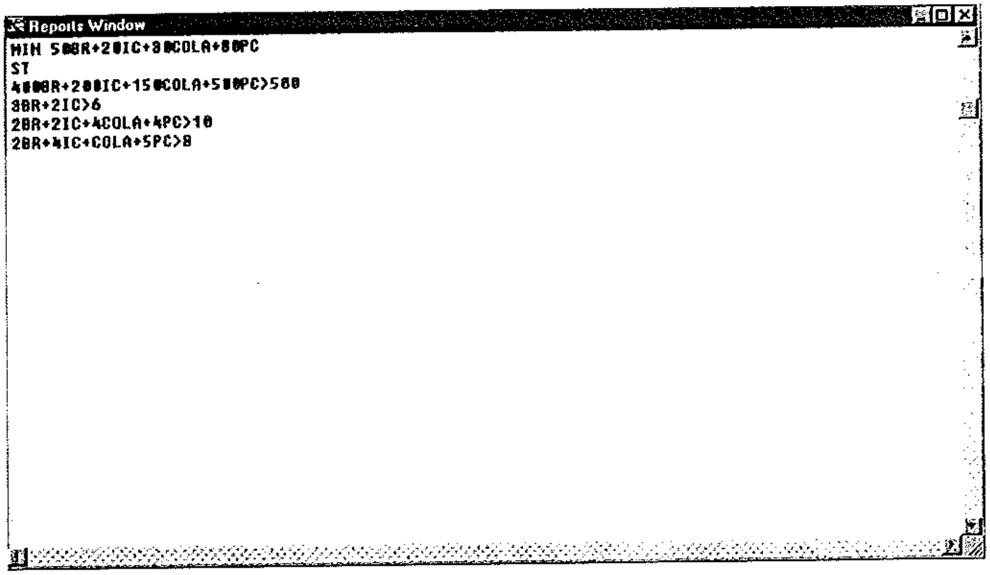

FIGURA 8

cantidad que decrece el valor de z óptimo si x_j disminuye una unidad (y todas las otras variables no básicas siguen siendo iguales a cero). En el resultado que proporciona LINDO para el problema de Dakota, el costo reducido es 0 para cada una de las variables básicas (DESKS y CHAIRS). Asimismo, el costo reducido para las TABLES es 5. Esto quiere decir que si Dakota fuera forzado a producir una mesa, el ingreso disminuiría en 5 dólares.

Por lo que se refiere a un problema de minimización, las columnas de PL óptimo, valor de la función objetivo, holgura y excedente, se interpretan como ya se explicó. Pero el costo reducido para una variable es –(coeficiente de la variable en el renglón 0 óptimo). Por lo tanto, en un problema de minimización, el costo reducido para una variable básica será también cero, pero el costo reducido para una variable no básica x_j será la cantidad en que se incremente el valor z óptimo si x_j aumenta una unidad (y todas las otras variables no básicas permanecen iguales a cero).

Para ilustrar la interpretación del resultado de LINDO para un problema de minimización, veamos el resultado de LINDO para el problema de la dieta de la sección 3.4 (véase figura 9). Si

$$\begin{aligned} \text{BR} &= \text{barras de chocolate ingeridas al día} \\ \text{IC} &= \text{bolas de helado de crema de chocolate ingeridas al día} \\ \text{COLA} &= \text{botellas de bebida de cola tomadas al día} \\ \text{PC} &= \text{rebanadas de pastel de queso con piña ingeridas al día} \end{aligned}$$

entonces, el problema de la dieta se podría formular como sigue:

$$\begin{array}{lllll} \text{min} & 50\text{ BR} + 20\text{ IC} + 30\text{ COLA} + 80\text{ PC} & & \\ \text{s.a} & 400\text{ BR} + 200\text{ IC} + 150\text{ COLA} + 500\text{ PC} \geq 500 & & \text{(Restricción de las calorías)} \\ & 3\text{ BR} + 2\text{ IC} \geq 6 & & \text{(Restricción del chocolate)} \\ & 2\text{ BR} + 2\text{ IC} + 4\text{ COLA} + 4\text{ PC} \geq 10 & & \text{(Restricción del azúcar)} \\ & 2\text{ BR} + 4\text{ IC} + \text{COLA} + 5\text{ PC} \geq 8 & & \text{(Restricción de la grasa)} \\ & \text{BR, IC, COLA, PC} \geq 0 & & \end{array}$$

La columna Value señala que la solución óptima es comer tres bolas de helado de crema de chocolate y beber una botella de bebida de cola al día. El valor de la función objetivo en los resultados de LINDO indica que el costo de la dieta es 90 centavos. La columna Slack or Surplus muestra que la primera restricción (calorías) tiene un excedente de 250

```
Reports Window

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE


LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)        90.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       BR        0.000000          27.500000
       IC        3.000000           0.000000
     COLA        1.000000           0.000000
       PC        0.000000          50.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)      250.000000           0.000000
       3)        0.000000          -2.500000
       4)        0.000000          -7.500000
       5)        5.000000           0.000000

NO. ITERATIONS=        2
```

FIGURA 9

calorías y que la cuarta limitación (grasa) tiene un excedente de 5 onzas. Por lo tanto, las restricciones de calorías y grasa son inactivas.

En la columna Reduced Cost se observa que si estuviéramos forzados a comer barras de chocolate (pero conservando PC $= 0$), el costo mínimo de la dieta diaria se incrementaría 27.5 centavos, y si tuviéramos que comer una rebanada de pastel de queso con piña (pero con BR $= 0$), el costo mínimo de la dieta diaria se incrementaría 50 centavos.

La orden Tableau

Si después de obtener la solución óptima para el problema de Dakota, usted cierra la ventana Reports y selecciona el comando Tableau (Tableau) (en el menú Reports), LINDO mostrará el tableau óptimo (véase figura 10). Hay que recordar que la primera restricción es el renglón 2 de LINDO, entonces se encuentra que BV $= \{s_1$, CHAIRS, DESKS, $s_4\}$. Entonces, por ejemplo, SLK5 en los resultados de LINDO corresponde a s_4. La variable artificial (ART) listada como básica en el renglón 1 es z; por consiguiente, el renglón 0 del arreglo óptimo es z + 5TABLES + $10s_2 + 10s_3 = 280$.

Cuando usted instale LINDO en su disco duro, el planteamiento de LINDO para los problemas de Dakota y de la dieta se encontrará en el directorio C:\WINSTON\LINDO-\SAMPLES.

Mayor información acerca de LINDO se encuentra en el Apéndice A del capítulo 4.

```
THE TABLEAU
     ROW    (BASIS)         DESKS        TABLES        CHAIRS        SLK   2       SLK   3
       1  ART               .000         5.000          .000          .000        10.000
       2  SLK    2          .000        -2.000          .000         1.000         2.000
       3    CHAIRS          .000        -2.000         1.000          .000         2.000
       4     DESKS         1.000         1.250          .000          .000         -.500
       5  SLK    5          .000         1.000          .000          .000          .000

     ROW    SLK    4       SLK    5
       1    10.000           .000        280.000
       2    -8.000           .000         24.000
       3    -4.000           .000          8.000
       4     1.500           .000          2.000
       5      .000          1.000         5.000
```

FIGURA 10
Ejemplo del comando TABLEAU

4.10 Generadores de matrices, LINGO y escala de PL

Muchos PL resueltos en la práctica, contienen miles de restricciones y variables de decisión. Pocos usuarios de la programación lineal querrían introducir las restricciones y la función objetivo cada vez que se tuviera que resolver un PL. Por esta razón, en las aplicaciones más modernas de PL se utiliza un **generador de matrices** para simplificar la introducción del PL. Un generador de matrices permite al usuario escribir los parámetros pertinentes para determinar las restricciones y la función objetivo del PL; luego genera la formulación del PL a partir de dicha información. Por ejemplo, considérese el ejemplo de Sailco de la sección 3.10. Si tuviera que tratar con un horizonte de planificación de 200 periodos, entonces este problema representaría 400 restricciones y 600 variables de decisión, –evidentemente demasiadas para escribirlas. Un generador de matrices para este problema, requeriría que el usuario proporcionara la información siguiente para cada periodo: costo de producción de un bote de velas con mano de obra en horario regular, costo de la mano de obra con tiempo extra, demanda y costos por conservar un cierto tiempo los botes. Con esta información, el generador de matrices obtendría la función objetivo y las restricciones del PL, activaría un *software* para PL (como LINDO) y resolvería el problema. Por último, se escribiría un analizador de resultados para mostrar la información final en un formato fácil de entender.

Paquete LINGO

El paquete LINGO es un ejemplo de un generador de matrices complejo (¡y mucho más!). LINGO es un lenguaje para modelos de optimización que le permite al usuario crear muchos (quizá miles) términos de restricciones o de función objetivo con sólo escribir una línea. Con el fin de ilustrar cómo funciona LINGO, se resuelve enseguida el problema de Sailco (ejemplo 12 del capítulo 3).

Solución del problema de Sailco

Sail.lng

Sigue el modelo de LINGO (es el archivo Sail.lng del disco compacto).

```
MODEL:
  1] SETS:
  2] QUARTERS/Q1,Q2,Q3,Q4/:TIME,DEM,RP,OP,INV;
  3] ENDSETS
  4] MIN=@SUM(QUARTERS:400*RP+450*OP+20*INV);
  5] @FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
  6] @FOR(QUARTERS(I)|TIME(I)#GT#1:
  7] INV(I)=INV(I-1)+RP(I)+OP(I)-DEM(I););
  8] INV(1)=10+RP(1)+OP(1)-DEM(1);
  9] DATA:
 10] DEM=40,60,75,25;
 11] TIME=1,2,3,4;
 12] ENDDATA
END
```

Para empezar a organizar un modelo con LINGO, piense en los objetos o conjuntos que definen el problema. En lo que se refiere a Sailco, los cuatro trimestres (Q1, Q2, Q3 y Q4) ayudan a resolver el problema. Los objetos que se tienen que conocer para determinar un programa de producción óptima [demanda (DEM), producción en el horario regular (RP), producción con tiempo extra (OP) e inventario a fines del trimestre (INV)] se determinan por cada trimestre. Las primeras tres líneas del programa de Sailco definen estas cuestiones. **SETS**: inicia la definición de los conjuntos necesarios para modelar el problema, y **ENDSETS** lo termina. El efecto de la línea 2 es definir cuatro trimestres: Q1, Q2, Q3 y Q4. Para cada trimestre, la línea 2 crea el tiempo (que indica si el trimestre es el primero, segundo, tercero o cuarto); la demanda de botes; los niveles de producción en el horario regular o con tiempo extra y el inventario final. Ahora que estos conjuntos y objetos están definidos, se utilizan para construir un modelo (que contiene una función objetivo y las restricciones). LINGO determina RP, PO e INV una vez que se introducen (en la sección de DATA del programa) las demandas y el número del trimestre.

La línea 4 crea la función objetivo; **MIN** = indica que se está efectuando una minimización. **@SUM** (QUARTERS: seguido de 400*RP + 450*OP + 20*INV significa la suma de 400*RP + 450*OP + 20*INV en todos los trimestres. Por lo tanto, por cada trimestre se calcula 400*(producción en el horario regular) + 450*(producción con el tiempo extra) + 20*(inventario final). Obsérvese que la línea 4 crea la función objetivo adecuada si son ¡4, 40, 400 o 4 000 trimestres!

La línea 5 dice que por cada trimestre, RP no puede ser mayor que 40. Una vez más, si hubiera 400 trimestres en el horizonte de planificación, este enunciado generaría 400 restricciones.

Las líneas 6 y 7 crean juntas restricciones para todos los trimestres (excepto el primero) que asegura que

Inventario final para el trimestre i = (Inventario final para el trimestre $i - 1$)
+ (Producción del trimestre i) − (Demanda del trimestre i)

Obsérvese que al contrario que LINDO, las variables se presentan en el lado derecho de la restricción (y los números en el lado izquierdo).

La línea 8 crea la limitación asegurando que

(Inventario final del trimestre 1) = (inventario al empezar el trimestre 1)
+ (Producción del trimestre 1) − (Demanda del trimestre 1)

Las líneas 9 a 12 introducen la información necesaria (la cantidad de trimestres y la demanda en cada uno de ellos). La sección DATA debe empezar con un enunciado **DATA**: y terminar con un **END DATA**. Al igual que en LINDO, el programa LINGO termina con un enunciado **END**.

Nótese que tras haber creado el modelo LINGO para resolver el ejemplo de Sailco, es posible editar con toda facilidad el modelo con la finalidad de resolver cualquier modelo para programar la producción en n periodos. Si se estuviera resolviendo un problema de 12 trimestres, simplemente se editaría (*véase* la observación 3, más adelante) la línea 2 para que quedara así: QUARTERS/1..12/:TIME,DEM,RP,PO,INV;. Luego se introducirían las demandas de los 12 trimestres en la línea 10, y la línea 11 cambiaría a TIME = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; . Para encontrar la solución óptima al problema, se selecciona el comando Solve en el menú de LINGO o se da un clic en el botón con un ojo de buey.

En este ejemplo también se examina cómo usar algunas de las capacidades de edición de LINGO. Escriba las primeras cuatro líneas de este modelo justo como lo haría normalmente. Esto define la sección de conjuntos y la función objetivo, aparecerá lo que sigue:

```
SETS:
  QUARTERS/Q1,Q2,Q3,Q4/:TIME,DEM,RP,OP,INV;
ENDSETS
MIN = @SUM(QUARTERS:400*RP+450*OP+20*INV);
```

La siguiente línea necesaria es el enunciado @FOR que restringe la producción en el horario regular (RP) a valores menores que 40. En lugar de escribir sobre este enunciado completo se utiliza la orden Paste Function de LINGO como se indica:

1 Se selecciona Paste Function en el menú Edit (Edición). Observe que usted no tiene que hacer clic en él, sino sólo señalarlo; así aparece un submenú.

2 En el submenú se selecciona Set, y aparece otro submenú en el que aparecen varias funciones @.

3 Se selecciona la función @FOR; así aparece una forma general del enunciado @FOR en la ventana.

4 Se reemplazan los términos generales de la función con los parámetros específicos. Este enunciado debe verse como lo que sigue:

```
@FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
```

Como se requiere otro enunciado @FOR para definir más adelante las restricciones en todos los trimestres, usted podría escribirlo o usar de nuevo el comando Paste Function. Mediante el uso de otros comandos de Edit, usted podrá copiar y pegar una parte del enunciado anterior @FOR en lugar de volverlo a escribir. Se hace como se indica:

1 Coloque su cursor al principio del enunciado @FOR escrito antes.

2 Presione el botón izquierdo del ratón y seleccione la parte del enunciado que se puede reutilizar, según se señala enseguida:

```
@FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
```

3 Seleccione Copy (Copiar) en el menú Edit, o bien, use Ctrl+C para copiar el texto seleccionado.

4 Coloque el cursor en el inicio de la línea en blanco siguiente y presione Ctrl+V para pegar el texto copiado.

Ahora ya puede escribir en el resto de la línea, y las líneas siguientes según se muestra a continuación:

```
@FOR(QUARTERS(I)|TIME(I) #GT#1:
INV(I)=INV(I-1)+RP(I)+OP(I)-DEM(I););
INV(1)=10+RP(1)+OP(1)-DEM(1);
DATA:
  DEM=40,60,75,25;
  TIME=1,2,3,4;
ENDDATA
END
```

Si bien el comando Copy sólo guardó algunos caracteres en este ejemplo, puede ahorrar muchos pasos cuando usted tiene repeticiones en un modelo. De manera similar, la orden Cut puede retirar partes seleccionadas para colocarlas en otro lado dentro del modelo. La información de este ejemplo se guarda en el archivo Sail.lng.

Sail.lng

Después de resolver el modelo, la primera parte de la Reports Window debe señalar un valor objetivo de 78 450 dólares en la pantalla de resultados de la figura 11.

LINGO y el problema de la oficina de correos

Post.lng

Ahora ya sabe usted cómo utilizar LINGO para resolver el ejemplo de la oficina de correos (ejemplo 7) del capítulo 3. El modelo siguiente de LINGO (archivo Post.lng) se puede utilizar para resolver este problema.

```
MODEL:
   1] SETS:
   2] DAYS/1..7/:RQMT,START;
   3] ENDSETS
   4] MIN=@SUM(DAYS:START);
   5] @FOR(DAYS(I):@SUM(DAYS(J)|
   6] (J#GT#I+2)#OR#(J#LE#I#AND#J#GT#I-5):
   7] START(J))>RQMT(I););
   8] DATA:
   9] RQMT=17,13,15,19,14,16,11;
  10] ENDDATA
END
```

En la línea 1 se definen los conjuntos necesarios para resolver el problema. Los días de la semana (lunes, martes, . . . , domingo) se definen en la línea 2, y se relaciona cada uno con dos cantidades: la cantidad de trabajadores necesarios (RQMT) y la cantidad de empleados que empiezan a trabajar en ese día de la semana (START). Con la línea 3 se termina la definición de los conjuntos.

Se forma una función objetivo, en la línea 4, mediante la suma de la cantidad de trabajadores que empiezan a trabajar cada día de la semana. La restricción que asegura que la cantidad de empleados que labora ese día es por lo menos tan grande como los requisitos del día, se genera en las líneas 5 a 7 para cada día de la semana. Para DAY(I), las líneas 5 y 6 suman la cantidad de empleados que empiezan a trabajar a los valores de J que satisfacen $J > I + 2$ o $J \leq I$ y $J > I - 5$. Por ejemplo, para $I = 1$, se genera la suma START(1) +

```
MODEL:
SETS:
QUARTERS/Q1,Q2,Q3,Q4/:TIME,DEM,RP,OP,INV;
ENDSETS
MIN=@SUM(QUARTERS:400*RP+450*OP+20*INV);
@FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
@FOR(QUARTERS(I)|TIME(I)#GT#1:
INV(I)=INV(I-1)+RP(I)+OP(I)-DEM(I););
INV(1)=10+RP(1)+OP(1)-DEM(1);
DATA:
DEM=40,60,75,25;
TIME=1,2,3,4;
ENDDATA
 END

MIN      400 RP( Q1) + 450 OP( Q1) + 20 INV( Q1) + 400 RP( Q2)
      + 450 OP( Q2) + 20 INV( Q2) + 400 RP( Q3) + 450 OP( Q3)
      + 20 INV( Q3) + 400 RP( Q4) + 450 OP( Q4) + 20 INV( Q4)
 SUBJECT TO
 2]  RP( Q1) <=   40
 3]  RP( Q2) <=   40
 4]  RP( Q3) <=   40
 5]  RP( Q4) <=   40
 6]- INV( Q1) - RP( Q2) - OP( Q2) + INV( Q2) =  - 60
 7]- INV( Q2) - RP( Q3) - OP( Q3) + INV( Q3) =  - 75
 8]- INV( Q3) - RP( Q4) - OP( Q4) + INV( Q4) =  - 25
 9]- RP( Q1) - OP( Q1) + INV( Q1) =  - 30
 END

Global optimal solution found at step:            7
 Objective value:                            78450.00

                         Variable          Value        Reduced Cost
                        TIME( Q1)       1.000000          0.0000000
                        TIME( Q2)       2.000000          0.0000000
                        TIME( Q3)       3.000000          0.0000000
                        TIME( Q4)       4.000000          0.0000000
                         DEM( Q1)       40.00000          0.0000000
                         DEM( Q2)       60.00000          0.0000000
                         DEM( Q3)       75.00000          0.0000000
                         DEM( Q4)       25.00000          0.0000000
                          RP( Q1)       40.00000          0.0000000
                          RP( Q2)       40.00000          0.0000000
                          RP( Q3)       40.00000          0.0000000
                          RP( Q4)       25.00000          0.0000000
                          OP( Q1)      0.0000000           20.00000
                          OP( Q2)       10.00000          0.0000000
                          OP( Q3)       35.00000          0.0000000
                          OP( Q4)      0.0000000           50.00000
                         INV( Q1)       10.00000          0.0000000
                         INV( Q2)      0.0000000           20.00000
                         INV( Q3)      0.0000000           70.00000
                         INV( Q4)      0.0000000           420.0000

                              Row   Slack or Surplus     Dual Price
                                1       78450.00           1.000000
                                2      0.0000000           30.00000
                                3      0.0000000           50.00000
                                4      0.0000000           50.00000
                                5       15.00000          0.0000000
                                6      0.0000000           450.0000
                                7      0.0000000           450.0000
                                8      0.0000000           400.0000
                                9      0.0000000           430.0000
```

FIGURA 11

START(4) + START(5) + START(6) + START(7), que es, en realidad, la cantidad de trabajadores que laboran en el día 1 (lunes). Entonces, la línea 7 (junto con las líneas 5 y 6) asegura que la cantidad de trabajadores que laboran en el día I es por lo menos igual a la cantidad necesaria en el día I [RQMT(I)]. Con la línea 8 empieza la sección DATA del programa. Los requisitos para cada día de la semana se introducen en la línea 9.

El apéndice B del capítulo 4 trata más detalles de LINGO. Los capítulos 7, 8, 9, 11 y 14 contienen más ejemplos de problemas resueltos con LINGO.

Escala de los PL

Este análisis de los paquetes para computadora se cierra con la advertencia de que un paquete para PL podría tener problemas al resolver el PL en las cuales hay coeficientes que no son iguales cero y que son muy pequeños o muy grandes en valores absolutos. Si están presentes dichos coeficientes, entonces LINDO muestra un mensaje en el que advierte que la escala del PL es inadecuado. En el manual de LINDO se recomienda que el usuario defina las unidades de la función objetivo, segundo miembro y variables de decisión, de tal manera que ningún coeficiente no cero tenga valores absolutos de más de 100 000 o menores de 0.0001.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Una compañía elabora tres productos. La utilidad por unidad, utilización de mano de obra y contaminación generada por unidad se proporcionan en la tabla 23. Se pueden utilizar cuando mucho 3 millones de horas de mano de obra para elaborar los tres productos, y las regulaciones gubernamentales exigen que la compañía genere cuando mucho 2 lb de contaminación. Si s_i = unidades producidas del producto i, entonces el PL apropiado es

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 3\,000\,000 \\ & 0.000003x_1 + 0.000002x_2 + 0.000001x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a Explique por qué la escala de este PL es inadecuado.

b Elimine el problema de la escala inadecuada redefiniendo las unidades de la función objetivo, variables de decisión y segundos miembros.

2 Resuelva el problema 1 de la sección 3.5 mediante LINGO.

3 Resuelva el ejemplo 14 del capítulo 3 mediante LINGO.

4 El problema de la **mezcla de productos** se presenta cuando se manufacturan N productos. Cada unidad que se elabora de un producto determinado requiere una cantidad específica de M recursos. Por cada unidad que se elabora del producto j se gana una utilidad p_j. Se dispone de una cantidad r_i de recurso i. Plantee un modelo LINGO que se pueda utilizar para maximizar la utilidad en esta situación. Luego resuelva con él el problema de la mezcla de productos definida por la información de las tablas 24 y 25. Suponga que se permiten números fraccionarios de vehículos.

5 El problema de mezcla de medios se presenta cuando una compañía tiene N medios en los cuales puede poner un anuncio. Hay K grupos de personas a los cuales desea llegar la compañía; además, ésta desea que miembros del grupo i vean sus anuncios por lo menos e_i veces. Un anuncio en el medio j cuesta c_j dólares y llega a a_{ij} miembros del grupo i. El objetivo es minimizar el costo por asegurar que la cantidad deseada de personas en cada grupo ve los anuncios. Establezca un modelo LINGO que se pueda utilizar para resolver cualquier problema de mezcla de medios. Luego resuelva el problema de mezcla de medios definido con la información de las tablas 26 y 27. Suponga que es factible una cantidad fraccionaria de anuncios.

TABLA 23

Producto	Utilidad (dólares)	Utilización de mani de hobra (h)	Contaminación (lb)
1	6	4	0.000003 lb
2	4	3	0.000002 lb
3	3	2	0.000001 lb

TABLA 24

	Automóviles	Camiones	Trenes
Acero utlizado (t)	2	3	5
Caucho utilizado (t)	0.3	0.7	0.2
Mano de obra utlizada (h)	10	12	20
Utilidad por unidad (dólares)	800	1 500	2 500

TABLA 25

Recurso	Cantidad disponible
Acero	50 t
Caucho	10 t
Mano de obra	150 h

TABLA 26

Grupo	Exposiciones necesarias (en millones)
Niños	15
Varones	40
Mujeres	50

TABLA 27

Núm. de Observaciónes (millones)	Programa		
	Sponge Bob	Friends	Dawson's Creek
Niños	3	1	0
Varones	1	15	4
Mujeres	2	20	9
Costo unitario	30 000	360 000	80 000

TABLA 28

	Distrito									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Blancos	400	200	150	300	400	100	200	300	250	150
Negros	200	150	100	120	480	490	140	160	100	160
	Distancia (Millas)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Escuela de bachillerato 1	1	2	3	2	3	4	2	3	1	2
Escuela de bachillerato 2	2	1	3	3	4	2	1	2	2	3
Escuela de bachillerato 3	3	3	2	1	2	3	2	2	3	1

6 Considere el siguiente **problema de asignación de estudiantes a los distritos escolares.** Hay I distritos y J escuelas de bachillerato en una ciudad. La distancia entre el distrito i y la escuela j es d_{ij} millas. En el distrito i hay w_i residentes blancos y b_i residentes negros. Cada escuela de bachillerato debe tener entre L y U estudiantes. En interés de la armonía racial, el porcentaje de negros en cada escuela de bachillerato debe estar entre 80 y 120% del porcentaje de estudiantes negros en toda la ciudad.

a Establezca un modelo de LINGO que se pueda usar para minimizar la distancia total que los estudiantes tendrán que viajar con objeto de cumplir con los requisitos del equilibrio racial.

b Utilice el modelo para resolver el problema planteado con la información de la tabla 28.

c ¿Cuáles podrían ser algunas funciones objetivo alternativas para esta situación?

d ¿Ve algún otro problema con nuestro modelo?

4.11 Degeneración y la convergencia del algoritmo simplex

Desde el punto de vista teórico, el algoritmo simplex (como ya se explicó) puede fracasar en la búsqueda de una solución óptima de un PL. No obstante, los PL que surgen de las aplicaciones actuales, rara vez muestran este desagradable comportamiento. Para tener el panorama completo, se analiza ahora el tipo de situación en la cual el simplex falla. El análisis depende decisivamente de la relación siguiente (para un problema de maximización) entre los valores de z para la sfb actual y la nueva sfb (es decir, la sfb después del siguiente pivoteo):

valor de z para la nueva sfb = valor de z de la sfb actual
 − (valor de la variable entrante en la nueva sfb)(coeficiente de la variable entrante en el renglón 0 de la sfb actual) **(15)**

La ecuación (15) se infiere porque por cada unidad que se incremente la variable entrante, z se incrementa en −(coeficiente de la variable entrante en el renglón 0 de la sfb actual). Recuerde que (coeficiente de la variable entrante en el renglón 0) < 0 y (valor de la variable entrante en la nueva sfb) ≥ 0. Al combinar estos hechos con (15) es posible deducir los hechos siguientes:

1 Si (valor de la variable entrante en la nueva sfb) > 0, entonces (valor de z para la nueva sfb) > (valor de z para la actual sfb).

2 Si (valor de la variable entrante en la nueva sfb) = 0, entonces (valor de z para la nueva sfb) = (valor de z para la actual sfb).

Por el momento, suponga que el PL que se está resolviendo tiene la propiedad siguiente: en cada una de las soluciones factibles básicas del PL, todas las variables básicas son positivas (positiva quiere decir > cero). Un PL con esta propiedad es un **PL no degenerado.**

Si se usa el algoritmo simplex para resolver un PL no degenerado, el hecho 1 de la lista anterior señala que cada iteración del algoritmo simplex incrementará a z. Esto quiere decir que cuando el algoritmo simplex se usa para resolver un PL no degenerado es imposible encontrar la misma sfb dos veces. Para entenderlo mejor, suponga que estamos en una solución factible básica (llamada sfb 1) cuya $z = 20$. El hecho 1 señala que nuestro siguiente pivote nos llevará a una sfb (sfb 2) cuya $z > 20$. Como ningún pivote futuro reducirá a z, ya nunca podremos regresar a una sfb que tenga $z = 20$. Por tanto, nunca regresaremos a la sfb 1. Recuérdese ahora que cada PL tiene sólo un número finito de soluciones factibles básicas. Como nunca podemos repetir una sfb, este razonamiento demuestra que cuando usamos el algoritmo simplex para resolver un PL no degenerado, tenemos la garantía de encontrar la solución óptima en un número finito de iteraciones. Por ejemplo, suponga que está resolviendo un PL no degenerado con 10 variables y 5 restricciones. Dicho PL tiene cuando mucho

$$\binom{10}{5} = 252$$

soluciones factibles básicas. Nunca se repetirá una sfb, así que ya sabe que para este problema el algoritmo simplex garantiza que encontrará una solución óptima después de cuando mucho 252 pivoteos.

Sin embargo, el algoritmo simplex podría fracasar con un PL degenerado.

DEFINICIÓN ■ Un PL es **degenerado** si tiene por lo menos una sfb en la cual una variable básica es igual a cero. ■

El PL siguiente es degenerado:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{16}$$

¿Qué sucede cuando se usa el algoritmo simplex para resolver (16)? Después de sumar las variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones se obtiene el tableau inicial de la tabla 29. En esta sfb, la variable básica $s_2 = 0$. Por lo tanto, (16) es uno PL degenerado. Cualquiera sfb que tenga por lo menos una variable básica igual a cero (o, en forma equivalente, por lo menos una restricción con un cero en el segundo miembro o lado derecho) es una **sfb degenerada**. Como $-5 < -2$, se introduce x_1 en la base. El cociente respectivo es 0. Esto significa que después de que x_1 entra a la base, x_1 se volverá igual a cero en la nueva sfb. Después de efectuar el pivoteo, se obtiene el tableau de la tabla 30. La nueva sfb

TABLA 29
Un PL degenerado

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−5	−2	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	1	0	6	$s_1 = 6$	6
0	1	−1	0	1	0	$s_2 = 0$	0*

TABLA 30
Tableau óptimo para (16)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	−7	0	5	0	$z = 0$	
0	0	2	1	−1	6	$s_1 = 6$	$\frac{6}{2} = 3$*
0	1	−1	0	1	0	$x_1 = 0$	Ninguno

TABLA 31
Tableau óptimo para (16)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Básica variable
1	0	0	3.5	1.5	21	$z = 21$
0	0	1	0.5	-0.5	3	$x_2 = 3$
0	1	0	0.5	0.5	3	$x_1 = 3$

tiene el mismo valor z que la sfb antigua. Esto es consistente con el hecho 2. ¡Todas las variables tienen exactamente, en la nueva sfb, el mismo valor que tenían antes del pivoteo! Por tanto, la nueva sfb también es degenerada. Al continuar con el algoritmo simplex se introduce x_2 en el renglón 1. El arreglo resultante se muestra en la tabla 31. Es un arreglo óptimo, así que la solución óptima para (16) es $z = 21, x_2 = 3, x_1 = 3, s_1 = s_2 = 0$.

Ahora ya se puede explicar la razón de que el algoritmo simplex pueda tener problemas al resolver un PL degenerado. Suponga que estamos resolviendo un PL degenerado para lo cual el valor de z óptimo es $z = 20$. Si iniciamos con la sfb que tenemos, es decir, $z = 20$, sabemos (al observar el PL que apenas resolvimos) que es posible para un pivoteo dejar sin cambio el valor de z. Esto significa que es posible para una sucesión de pivoteos como la siguiente que ocurra:

sfb inicial (sfb 1): $z = 20$
Después del primer pivoteo (sfb 2): $z = 20$
Después del segundo pivoteo (sfb 3): $z = 20$
Después del tercer pivoteo (sfb 4): $z = 20$
Después del cuarto pivoteo (sfb 1): $z = 20$

En esta situación nos encontramos la misma sfb dos veces. Este hecho se llama **ciclo**. Si se presenta un ciclo, entonces estaremos dando vueltas por siempre entre un conjunto de soluciones factibles básicas, y nunca alcanzaremos la solución óptima ($z = 30$, en nuestro ejemplo). Ciertamente ocurren los ciclos (*véase* el problema 3 al final de esta sección). Por fortuna, el algoritmo simplex se puede modificar para que los ciclos nunca se presenten [*véase* Bland (1977) o Dantzig (1963) donde encontrará más detalles].† En Kotiah y Slater (1973) hay un ejemplo práctico acerca de ciclos.

Si un PL tiene varias soluciones factibles básicas degeneradas (o una sfb con varias variables iguales a cero), entonces el algoritmo simplex es, muchas veces, ineficaz. Para entender por qué, examine la región factible para (16) en la figura 12, el triángulo sombreado *BCD*. Los puntos extremos de la región factible son *B*, *C* y *D*. Al seguir el procedimiento descrito en la sección 4.2, observe la correspondencia entre las soluciones factibles básicas para (16) y los puntos extremos de su región factible (*véase* tabla 32). Tres conjuntos de variables básicas corresponden al punto extremo *C*. Se puede demostrar que para que un PL con n variables de decisión sea degenerado, $n + 1$ o más de las restricciones del PL (sin olvidar las restricciones de signo $x_i \geq 0$ como restricciones) deben ser activas en un punto extremo.

En (16), las restricciones $x_1 - x_2 \leq 0, x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ son activas u obligatorias en el punto *C*. Cada punto extremo en el cual tres o más restricciones sean activas, corresponderá a más de un conjunto de variables básicas. Por ejemplo, en el punto *C*, s_1 debe ser una de las variables básicas, pero la otra variable básica debe ser x_2, x_1 o s_2.

†Bland demostró que es posible evitar los ciclos mediante la aplicación de las reglas siguientes (suponga que las variables de holgura y de excedente se numeran $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$):
1 Seleccione como variable entrante (en un problema de maximización) a la variable con coeficiente negativo que tenga el subíndice más pequeño en el renglón 0.
2 Si hay un vínculo en la prueba del cociente, deshágalo escogiendo al ganador de la prueba del cociente, de tal manera que la variable deje la base que tiene el subíndice más pequeño.

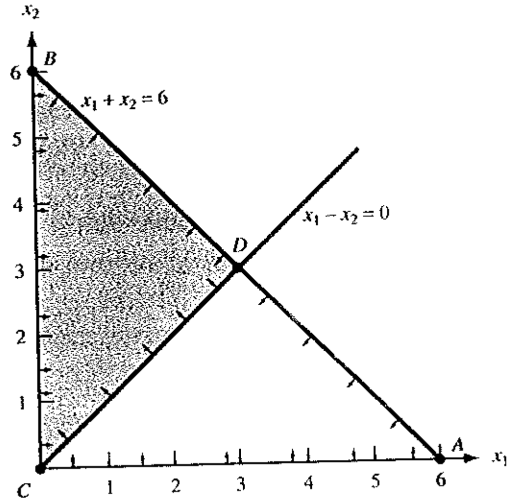

FIGURA 12
Región factible para el PL (16)

TABLA 32
Tres conjuntos de variables básicas corresponden al vértice *C*

Variables básicas	Solución factible básica	Corresponde a punto extremo
x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 3, s_1 = s_2 = 0$	D
x_1, s_1	$x_1 = 0, s_1 = 6, x_2 = s_2 = 0$	C
x_1, s_2	$x_1 = 6, s_2 = -6, x_2 = s_1 = 0$	No factible
x_2, s_1	$x_2 = 0, s_1 = 6, x_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 6, s_2 = 6, s_1 = x_1 = 0$	B
s_1, s_2	$s_1 = 6, s_2 = 0, x_1 = x_2 = 0$	C

También ya es posible analizar por qué el algoritmo simplex muchas veces es un método ineficaz para resolver PL degenerados. Suponga que un PL es degenerado. Entonces podría haber muchos conjuntos (quizá cientos) de variables básicas que corresponden a algún punto extremo no óptimo. El algoritmo simplex podría encontrar todos estos conjuntos de variables básicas antes de advertir que era un punto extremo no óptimo. Este problema se ilustró (a pequeña escala) al resolver (16): el algoritmo simplex efectuó dos pivoteos antes de encontrar que el punto C era subóptimo. Por fortuna, algunos PL degenerados tienen una estructura especial que permite resolverlas por medio de métodos distintos al algoritmo simplex (*véase* por ejemplo el análisis del problema de asignación en el capítulo 7).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Incluso si un arreglo inicial de un PL es no degenerado, los tableaus podrían mostrar después degeneración. Los tableaus degenerados se presentan a menudo en el tableau que sigue a un empate en la prueba del cociente. Con el fin de ilustrar lo anterior resuelva el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ 4x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grafique también la región factible y muestre cuáles puntos extremos corresponden a más de un conjunto de variables básicas.

2 Determine la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 1 \\ -x_1 + x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

3 Demuestre que si se rompen los empates en la prueba del cociente por preferir al renglón 1 y no al renglón 2, entonces se presentan los ciclos cuando el siguiente PL se resuelve mediante el algoritmo simplex:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4$$
$$\text{s.a} \quad -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0$$
$$\frac{x_1}{3} + x_2 - \frac{x_3}{3} - 2x_4 \leq 0$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

4 Demuestre que si los empates se rompen por favorecer a los renglones de numeración baja, entonces se presentan los ciclos cuando se usa el método simplex para resolver el PL siguiente:

$$\max z = -3x_1 + x_2 - 6x_3$$
$$9x_1 + x_2 - 9x_3 - 2x_4 \leq 0$$
$$x_1 + \frac{x_2}{3} - 2x_3 - \frac{x_4}{3} \leq 0$$
$$-9x_1 - x_2 + 9x_3 + 2x_4 \leq 1$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

5 Demuestre que si la Regla de Bland para evitar los ciclos se aplica al problema 4, entonces no se presentan los ciclos.

6 Considere un PL (problema de maximización) en el cual cada solución factible básica es no degenerada. Suponga que x_i es la única variable en nuestro arreglo actual que tiene coeficiente negativo en el renglón 0. Demuestre que cualquier solución óptima para el PL debe tener $x_i > 0$.

4.12 Método de la gran M

Recuerde que el algoritmo simplex requiere una sfb inicial. En todos los problemas que se han resuelto hasta ahora se determinó una sfb inicial usando las variables de holgura como si fueran variables básicas. Pero si un PL tiene alguna restricción $\geq$ o de igualdad, no sería tan evidente una sfb inicial. Mediante el ejemplo 4 se ilustra cuán difícil podría ser encontrar una sfb. Cuando una sfb no es evidente, el **método de la gran M** (o el método simplex de dos fases de la sección 4.13) se podría aplicar para resolver el problema. En esta sección se trata el método de la gran M, una versión del algoritmo simplex que determina primero un sfb mediante la suma de variables "artificiales" al problema. Naturalmente, la función objetivo del PL original se tiene que modificar para que las variables artificiales sean iguales a cero en la conclusión del algoritmo simplex. El ejemplo siguiente ilustra el método de la gran M.

EJEMPLO 4 Bevco

Bevco elabora una bebida carbonatada sabor naranja que se llama Oranj mediante la combinación de agua carbonatada de naranja y jugo de naranja. Cada onza de agua carbonatada de naranja contiene 0.5 onzas de azúcar y 1 mg de vitamina C. Cada onza de jugo de naranja contiene 0.25 onzas de azúcar y 3 mg de vitamina C. Bevco gasta 2 centavos por producir 1 onza de agua carbonatada de naranja y 3 centavos por elaborar 1 onza de jugo de naranja. El departamento de mercadotecnia de Bevco decidió que la botella de 10 onzas de Oranj debe contener por lo menos 20 mg de vitamina C y cuando mucho 4 onzas de azúcar. Utilice la programación lineal para determinar cómo Bevco puede cumplir los requisitos del departamento de mercadotecnia a un costo mínimo.

Solución Sea

x_1 = cantidad de onzas de agua carbonatada de naranja en una botella de Oranj

x_2 = cantidad de onzas de jugo de naranja en una botella de Oranj

Entonces, el PL apropiado es

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\leq 4 \quad \text{(Restricción del azúcar)} \\ x_1 + 3x_2 &\geq 20 \quad \text{(Restricción de la vitamina C)} \end{aligned} \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a} \qquad x_1 + x_2 &= 10 \qquad \text{(10 oz en una botella de Oranj)}\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(La solución se obtiene después en esta misma sección.)

Para transformar a (17) en la forma estándar se agrega una variable de holgura s_1 a la restricción del azúcar y se resta una variable de excedente e_2 de la restricción de la vitamina C. Después de escribir la función objetivo como $z - 2x_1 - 3x_2 = 0$ se obtiene la forma estándar siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\text{Renglón 0:} \quad z - 2x_1 - 3x_2 = 0\\
&\text{Renglón 1:} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4\\
&\text{Renglón 2:} \quad x_1 + 3x_2 - e_2 = 20\\
&\text{Renglón 3:} \quad x_1 + x_2 = 10
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Todas las variables son no negativas

En la búsqueda de una sfb se observa que $s_1 = 4$ se podría utilizar como una variable básica (y factible) para el renglón 1. Si se multiplica el renglón 2 por -1, entonces $e_2 = -20$ se podría usar como una variable básica en el renglón 2. Desafortunadamente, $e_2 = -20$ viola la restricción de signo $e_2 \geq 0$. Por último, no son evidentes las variables básicas en el renglón 3. Por lo tanto, con objeto de usar el algoritmo simplex para resolver (17), los renglones 2 y 3 necesitan cada uno una variable básica (y factible). Para solucionar este problema, se "inventa" simplemente una variable básica factible por cada limitación que necesite una. Como nosotros creamos estas variables y no son variables reales, las llamamos **variables artificiales.** Si una variable artificial se suma al renglón i, la denominamos a_i. En el problema actual se requiere añadir una variable artificial a_2 al renglón 2 y una variable artificial a_3 al renglón 3. El conjunto de ecuaciones resultante es

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 3x_2 &= 0\\
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 &= 4\\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 20\\
x_1 + x_2 + a_3 &= 10
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Entonces se tiene una sfb: $z = 0$, $s_1 = 4$, $a_2 = 20$, $a_3 = 10$. No hay garantía, desafortunadamente, de que la solución óptima para (18) sea la misma solución óptima para (17). Al resolver (18) se podría llegar a una solución óptima en la cual una o más variables artificiales son positivas. Tal solución podría no ser factible en el problema original (17). Por ejemplo, al resolver (18), se podría demostrar con toda facilidad que la solución óptima es $z = 0$, $s_1 = 4$, $a_2 = 20$, $a_3 = 10$, $x_1 = x_2 = 0$. Esta "solución" no contiene vitamina C y pone 0 onzas de agua carbonatada en una botella, ¡así que posiblemente no resuelve nuestro problema original! Si la solución óptima para (18) es resolver (17), entonces hay que estar seguros de que la solución óptima para (18) hace que todas las variables artificiales sean iguales a cero. En un problema de minimización es posible asegurar que todas las variables artificiales serán cero al sumar un término Ma_i a la función objetivo por cada variable artificial a_i. (En un problema de maximización, sume un término $-Ma_i$ a la función objetivo.) Aquí M representa un número positivo "muy grande". Por lo tanto, en (18), la función objetivo cambiaría a

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

Entonces, el renglón 0 cambiaría a

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Modificar la función objetivo de esta manera hace extremadamente costoso que una variable artificial sea positiva. Con esta función objetivo modificada parece razonable que la solución óptima para (18) tenga $a_2 = a_3 = 0$. En este caso, la solución óptima para (18) resuelve el problema original (17). Sin embargo, sucede a veces que al resolver el análogo de (18), algunas de las variables artificiales podrían asumir valores positivos en la solución óptima. Si esto sucediera, el problema original no tiene solución factible.

Por razones obvias, el método que se ha explicado recibe el nombre de método de la gran M. Enseguida se presenta una explicación formal de este método.

Descripción del Método de la gran M

Paso 1 Modifique las restricciones de tal manera que el segundo miembro o lado derecho de cada una sea no negativo. Para lograrlo, cada restricción con un segundo miembro negativo se multiplica por -1. Recuerde que si usted multiplica una desigualdad por un número negativo, se invierte la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, este método transformaría la desigualdad $x_1 + x_2 \geq -1$ en $-x_1 - x_2 \leq 1$. También transformaría $x_1 - x_2 \leq -2$ en $-x_1 + x_2 \geq 2$.

Paso 1′ Identifique cada restricción que es ahora (después del paso 1) una restricción $=$ o $\geq$. En el paso 3 se suma una variable artificial a cada una de estas restricciones.

Paso 2 Convierta cada restricción de desigualdad en la forma estándar. Esto quiere decir que si la restricción i es una restricción $\leq$ se suma una variable de holgura s_1, y si la restricción i es una restricción $\geq$, se resta una variable de excedente e_i.

Paso 3 Si (después de haber terminado el paso 1) la restricción i es una restricción $\geq$ o $=$, sume una variable artificial a_i. También sume la restricción de signo $a_i \geq 0$.

Paso 4 Sea M un número positivo muy grande. Si el PL es un problema de minimización, sume (por cada variable artificial) Ma_i a la función objetivo. Si el PL es un problema de maximización, sume (por cada variable artificial) $-Ma_i$ a la función objetivo.

Paso 5 Como cada variable artificial está en la base de inicio, todas las variables artificiales se tienen que eliminar del renglón 0 antes de empezar el simplex. De esta manera se asegura que se empieza con una forma canónica. Al elegir la variable entrante, recuerde que M es un número positivo muy grande. Por ejemplo, $4M - 2$ es más positivo que $3M + 900$, y $-6M - 5$ es más negativo que $-5M - 40$. Ahora se resuelve el problema transformado por el simplex. Si todas las variables artificiales son iguales a cero en la solución óptima, entonces se ha encontrado la solución óptima del problema original. Si algunas variables artificiales son positivas en la solución óptima, entonces el problema original es no factible.†

Cuando una variable artificial deja la base, se podría suprimir su columna desde arreglos futuros porque el objetivo de una variable artificial es sólo lograr una solución factible básica inicial. Una vez que la variable artificial abandona la base, ya no se le necesita. A pesar de este hecho se conservan a menudo las variables artificiales en todos los arreglos. La razón es evidente en la sección 6.7.

Solución **Ejemplo 4 (Continuación)**

Paso 1 Como ninguna de las restricciones tiene un lado derecho negativo, no se tiene que multiplicar restricción alguna por -1.

†Se ha ignorado la posibilidad de que cuando el PL (con las variables artificiales) se resuelve, el arreglo final podría indicar que el PL es no acotado y que todas las variables artificiales en este arreglo son iguales a cero, entonces el PL original es no acotado. Si el arreglo final indica que el PL es no acotado y por lo menos una variable artificial es positiva, entonces el PL original es no factible. Véanse más detalles en Bazaraa y Jarvis (1990).

Paso 1' Las restricciones 2 y 3 requieren variables artificiales.

Paso 2 Sume una variable de holgura s_1 al renglón 1 y reste una variable de excedente e_2 del renglón 2. El resultado es

$$\begin{aligned} &\min z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Renglón 1:} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ &\text{Renglón 2:} \quad x_1 + 3x_2 - e_2 = 20 \\ &\text{Renglón 3:} \quad x_1 + \ \ x_2 = 10 \end{aligned}$$

Paso 3 Sume una variable artificial a_2 al renglón 2 y una variable artificial a_3 al renglón 3. El resultado es

$$\begin{aligned} &\min z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Renglón 1:} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ &\text{Renglón 2:} \quad x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\ &\text{Renglón 3:} \quad x_1 + \ \ x_2 + a_3 = 10 \end{aligned}$$

A partir de este arreglo se observa que la sfb inicial es $s_1 = 4$, $a_2 = 20$ y $a_3 = 10$.

Paso 4 Como se está resolviendo un problema de minimización, se suma $Ma_2 + Ma_3$ a la función objetivo (si se estuviera trabajando con un problema de maximización, se sumaría $-Ma_2 - Ma_3$). Lo anterior hace a a_2 y a_3 muy poco atractivas, además de que el hecho de minimizar z ocasiona que a_2 y a_3 sean cero. La función objetivo es ahora

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

Paso 5 El renglón 0 es entonces

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Como a_2 y a_3 están en la sfb de inicio (que es la razón de haberlas introducido) se tienen que eliminar del renglón 0. Para eliminar a_2 y a_3 del renglón 0, simplemente se reemplaza el renglón 0 por renglón 0 + M(renglón 2) + M(renglón 3). Así se obtiene

$$\begin{aligned} &\text{Renglón 0:} \quad z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0 \\ &M(\text{renglón 2}): \quad Mx_1 + 3Mx_2 - Me_2 + Ma_2 = 20M \\ &M(\text{renglón 3}): \quad Mx_1 + Mx_2 + Ma_3 = 10M \\ &\text{Nuevo renglón 0:} \quad z + (2M - 2)x_1 + (4M - 3)x_2 - Me_2 = 30M \end{aligned}$$

Al combinar el nuevo renglón 0 con los renglones 1 a 3 se obtiene el arreglo inicial de la tabla 33.

Se está trabajando con un problema de minimización, así que la variable con el coeficiente más positivo en el renglón 0 debe entrar a la base. Como $4M - 3 > 2M - 2$, la variable x_2 debe entrar a la base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en el renglón 2, lo cual significa que la variable a_2 debe dejar la base. La parte más difícil de hacer en el pivoteo es eliminar x_2 del renglón 0. Primero se reemplaza el renglón 2 por $\frac{1}{3}$(renglón

TABLA 33
Arreglo inicial de Bevco

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	0	0	$30M$	$z_2 = 30M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

TABLA 34
Primer tableau para Bevco

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable Básica	Cociente
1	$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$	$z = \frac{60+10M}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1 = \frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2 = \frac{20}{3}$	20
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3 = \frac{10}{3}$	25*

2). Por lo tanto, el nuevo renglón 2 es

$$\tfrac{1}{3}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{3}e_2 + \tfrac{1}{3}a_2 = \tfrac{20}{3}$$

Enseguida se puede eliminar x_2 del renglón 0 sumando $-(4M - 3)$(nuevo renglón 2) al renglón 0, o bien, $(3 - 4M)$(nuevo renglón 2) + renglón 0. Ahora,

$$(3 - 4M)(\text{nuevo renglón } 2) =$$

$$\frac{(3-4M)x_1}{3} + (3 - 4M)x_2 - \frac{(3-4M)e_2}{3} + \frac{(3-4M)a_2}{3} = \frac{20(3-4M)}{3}$$

$$\text{Renglón 0:} \qquad z + (2M - 2)x_1 + (4M - 3)x_2 - Me_2 = 30M$$

$$\text{Nuevo renglón 0: } z + \frac{(2M-3)x_1}{3} + \frac{(M-3)e_2}{3} + \frac{(3-4M)a_2}{3} = \frac{60+10M}{3}$$

Después de efectuar algunas OER para eliminar x_2 del renglón 1 y del renglón 3 se obtiene el tableau de la tabla 34. Como $\frac{2M-3}{3} > \frac{M-3}{3}$, se introduce x_1 a la base. La prueba del cociente indica que x_1 debe entrar a la base en el tercer renglón del tableau actual. Luego a_3 dejará la base, y el siguiente tableau tendrá $a_2 = a_3 = 0$. Para introducir x_1 a la base en el renglón 3 primero se reemplaza el renglón 3 por $\frac{3}{2}$(renglón 3). Por lo tanto, el nuevo renglón 3 será

$$x_1 + \frac{e_2}{2} - \frac{a_2}{2} + \frac{3a_3}{2} = 5$$

Para eliminar x_1 del renglón 0, se reemplaza el renglón 0 por renglón 0 + $(3 - 2M)$(nuevo renglón 3)/3.

$$\text{Renglón 0:} \qquad z + \frac{(2M-3)x_1}{3} + \frac{(M-3)e_2}{3} + \frac{(3-4M)a_2}{3} = \frac{60+10M}{3}$$

$$\frac{(3-2M)(\text{nuevo renglón 3})}{3}: \frac{(3-2M)x_1}{3} + \frac{(3-2M)e_2}{6} + \frac{(2M-3)a_2}{6} + \frac{(3-2M)a_3}{2} = \frac{15-10M}{3}$$

$$\text{Nuevo renglón 0:} \qquad z - \frac{e_2}{2} + \frac{(1-2M)a_2}{2} + \frac{(3-2M)a_3}{2} = 25$$

El nuevo renglón 1 y el nuevo renglón 2 se calculan como siempre, lo cual origina el tableau de la tabla 35. Como todas las variables en el renglón 0 tienen coeficientes no positivos, éste es un tableau óptimo; todas las variables artificiales son iguales a cero en este tableau, por lo que se ha encontrado la solución óptima del problema de Bevco: $z = 25$, $x_1 = x_2 = 5$, $s_1 = \frac{1}{4}$, $e_2 = 0$. Esto significa que Bevco puede mantener el costo de producir una botella de 10 onzas de Oranj a 25 centavos mediante la combinación de 5 onzas de agua carbonatada de naranja, y 5 onzas de jugo de naranja. Obsérvese que la columna de a_2 podría ser suprimida después de que a_2 deja la base (al concluir el primer pivoteo), y que la columna de a_3 se podría eliminar después de que a_3 deja la base (cuando concluye el segundo pivoteo).

TABLA 35
Tableau óptimo para Bevco

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable Básica
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25	$z = 25$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

Cómo detectar un PL no factible

Ahora modificaremos el problema de Bevco: se requiere que una botella de 10 onzas de Oranj contenga por lo menos 36 miligramos de vitamina C. Aun cuando 10 onzas de jugo de naranja contienen sólo $3(10) = 30$ mg de vitamina C, se sabe que Bevco posiblemente no puede cumplir con las nuevas cantidades de vitamina C. Esto quiere decir que el PL de Bevco quizá no tenga solución factible. Veamos cómo el método de la gran M revela la no factibilidad del PL. Hemos cambiado el PL de Bevco por

$$
\begin{array}{lll}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
\text{s.a} \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le 4 & \text{(Restricción del azúcar)} & \\
\quad x_1 + 3x_2 \ge 36 & \text{(Restricción de la vitamina C)} & (19) \\
\quad x_1 + x_2 = 10 & \text{(Restricción de las 10 oz)} & \\
\quad x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}
$$

Después de efectuar los pasos 1 a 5 del método de la gran M se obtiene el tableau inicial de la tabla 36. Como $4M - 3 > 2M - 2$, se introduce x_2 a la base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar en el renglón 3, lo que ocasiona que a_3 deje la base. Después de que x_2 entra a la base, se obtiene el tableau de la tabla 37. Puesto que cada variable tiene coeficiente no positivo en el renglón 0, éste es un tableau óptimo. La solución óptima que este tableau indica es $z = 30 + 6M$, $s_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 6$, $x_2 = 10$, $a_3 = e_2 = x_1 = 0$. Una variable artificial (a_2) es positiva en el tableau óptimo, por lo que el paso 5 muestra que el PL original no tiene solución factible.† En resumen, *si alguna variable artificial es positiva en el arreglo óptimo de la gran M, entonces el PL original no tiene solución factible.*

TABLA 36
Arreglo inicial para Bevco (no factible)

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	$2M - 2$	$4M - 3$	0	$-M$	0	0	$46M$	$z = 46M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10*

†Para explicar por qué (19) no puede tener solución factible, suponga que lo es $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Evidentemente, si se establece que $a_3 = a_2 = 0$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ será factible para el PL modificado (el PL con variables artificiales). Si se sustituye $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ en la función objetivo modificada ($z = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + Ma_2 + Ma_3$), se obtiene $z = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2$ (esto se infiere porque $a_3 = a_2 = 0$). Como M es grande, este valor de z es ciertamente menor que $6M + 30$. Lo anterior contradice el hecho de que el mejor valor de z para la función objetivo modificada es $6M + 30$. Esto significa que el PL original (19) no debe tener solución factible.

TABLA 37
Tableau que indica ausencia de factibilidad para Bevco (no factible)

z	x_1	s_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	$1 - 2M$	0	0	$-M$	0	$3 - 4M$	$30 + 6M$	$z_2 = 6M + 30$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

Obsérvese que cuando se usa el método de la gran M, es difícil determinar qué tan grande debe ser M. Por lo regular, se elige que M sea por lo menos 100 veces más grande que el coeficiente más grande en la función objetivo original. La introducción de números tan grandes en el problema, puede ocasionar errores de redondeo (BA; ROUNDOFF) y otras dificultades de cálculo. Por esta razón, la mayoría de códigos de computadoras resuelve PL mediante el método simplex de dos fases (que se explica en la sección 4.13).

PROBLEMAS

Grupo A

Aplique el método de la M grande para resolver los PL siguientes:

1 $\min z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

2 $\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 - x_2 \ge -1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3 $\max z = 3x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & x_1 + x_2 \ge 3 \\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4 $\min z = 3x_1$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

5 $\min z = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

6 $\min z = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & x_1 + x_2 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4.13 Método simplex de dos fases†

Cuando una solución factible básica no está fácilmente disponible, se podría utilizar el método simplex de dos fases en lugar del método de la gran M. En el método simplex de dos fases, se suman variables artificiales a las mismas restricciones, igual que en método de la gran M. Luego se encuentra una sfb para el PL original mediante la resolución del PL de la fase I. En el PL de la fase I, la función objetivo es para minimizar la suma de todas las variables artificiales. Al finalizar la fase I, se reintroduce la función objetivo del PL original y se determina la solución óptima para el PL original.

Con los siguientes pasos se explica el método simplex de dos fases. Note que los pasos 1 a 3 de este método son idénticos a los pasos 1 a 3 del método de la gran M.

†En esta sección se tratan temas que se podrían omitir sin que se pierda la continuidad.

Paso 1 Modifique las restricciones de tal manera que el segundo miembro o lado derecho de cada una sea no negativo. Para lograrlo, se multiplica cada restricción con un segundo miembro negativo por -1.

Paso 1′ Identifique cada restricción que ahora es (después del paso 1) una restricción $=$ o $\geq$. En el paso 3 se suma una variable artificial a cada una de estas restricciones.

Paso 2 Convierta cada restricción de desigualdad en la forma estándar. Si la restricción i es una restricción $\leq$ se suma entonces una variable de holgura s_i. Si la restricción i es una restricción $\geq$, se resta una variable de excedente e_i.

Paso 3 Si (después de haber terminado el paso 1) la restricción i es una restricción $\geq$ o $=$, sume una variable artificial a_i. También sume la restricción de signo $a_i \geq 0$.

Paso 4 Por ahora ignore la función objetivo del PL original. Mientras, resuelva un PL cuya función objetivo es min w' = (suma de todas las variables artificiales). A esta parte se le denomina PL de la fase I. El hecho de resolver el PL de la fase I forzará a las variables artificiales a ser cero.

Como cada $a_i \geq 0$, al resolver el PL de la fase I dará como resultado uno de los tres casos siguientes:

Caso 1 El valor óptimo de w' es mayor que cero. En este caso, el PL original no tiene solución factible.

Caso 2 El valor óptimo de w' es igual a cero y ninguna variable artificial está en la base óptima de la fase I. En este caso, se suprimen todas las columnas del arreglo óptimo de la fase I que corresponden a las variables artificiales. Luego se combinan la función objetivo original y las restricciones del arreglo óptimo de la fase I. Así se obtiene el **PL de la fase II.** La solución óptima para el PL de la fase II es la solución óptima del PL original.

Caso 3 El valor óptimo de w' es igual a cero y por lo menos una variable artificial está en la base óptima de la fase I. En este caso se puede encontrar la solución óptima del PL original si al final de la fase I se eliminan, del arreglo óptimo de la fase I, todas las variables artificiales no básicas y cualquier variable del problema original que tenga coeficiente negativo en el renglón 0 del arreglo óptimo de la fase 1.

Antes de resolver ejemplos que ilustren los casos 1 a 3, se analiza brevemente por qué $w' > 0$ corresponde al PL original que no tiene solución factible y $w' = 0$ corresponde al PL original que tiene por lo menos una solución factible

Soluciones factibles de la fase I y fase II

Suponga que el PL original es no factible. Entonces, la única manera de obtener una solución factible para el PL de la fase 1 es hacer positiva por lo menos una variable artificial. En esta situación resultará $w' > 0$ (caso 1). Por otro lado, si el PL original tiene una solución factible, entonces esta solución (con todas las $a_i = 0$) es factible en el PL de la fase 1 y da $w' = 0$. Esto quiere decir que si el PL original tiene una solución factible, la solución óptima de la fase I tendrá $w' = 0$. Enseguida se ilustran por medio de ejemplos los casos 1 y 2 del método simplex de dos fases.

EJEMPLO 5 Simplex de dos fases: caso 2

Se usa el simplex de dos fases para resolver primero el problema de Bevco de la sección 4.12. Recuerde que el problema de Bevco era

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\leq 4 \\
x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\
x_1 + x_2 &= 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución Al igual que en el método de la gran M, por medio de los pasos 1 a 3, se transforman las restricciones en

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad & = 4\\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad & = 20\\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + a_3 & = 10
\end{aligned}
$$

El paso 4 genera el siguiente PL de la fase I:

$$
\begin{aligned}
\min w' &= a_2 + a_3\\
\text{s.a}\quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad & = 4\\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad & = 20\\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + a_3 & = 10
\end{aligned}
$$

Este conjunto de ecuaciones proporciona una sfb de inicio para la fase I ($s_1 = 4$, $a_2 = 20$, $a_3 = 10$).

Obsérvese que el renglón 0 de este tableau ($w' - a_2 - a_3 = 0$) contiene las variables básicas a_2 y a_3. Como en el método de la gran M, a_2 y a_3 se deben eliminar del renglón 0 antes de poder resolver la fase I. Se suman simplemente el renglón 2 y el renglón 3 al renglón 0 para eliminar a_2 y a_3 del renglón 0:

$$
\begin{array}{lr}
\text{Renglón 0:} & w' \qquad\qquad\qquad - a_2 - a_3 = 0\\
+\ \text{Renglón 2:} & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 \qquad = 20\\
+\ \text{Renglón 3:} & x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + a_3 = 10\\
=\ \text{Nuevo renglón 0:} & w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 \qquad\quad = 30
\end{array}
$$

Al combinar el nuevo renglón 0 con las restricciones de la fase I se obtiene el tableau inicial de la fase I de la tabla 38. Como el problema de la fase I es *siempre* un problema de minimización (incluso si el PL original es un problema de maximización), se introduce x_2 a la base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en el renglón 2, y salir a_2. Después de efectuar las OER pertinentes se llega al tableau de la tabla 39. Como $5 < 20$ y $5 < \frac{28}{5}$, x_1 entra a la base en el renglón 3. Por lo tanto, a_3 saldrá de la base. Como a_2 y a_3 serán no básicas después de que el pivoteo actual se termine, se sabe ya que el tableau siguiente será óptimo para la fase I. Una mirada al tableau en la tabla 40 confirma este hecho.

Como $w' = 0$, concluyó la fase I. Se encontró la solución factible básica $s_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 5$, $x_1 = 5$. Ninguna variable artificial está en la base de la fase I. Por consiguiente, el problema es un ejemplo del caso 2. Ahora se suprimen las columnas de la variable artificial a_2 y a_3 (ya no se les necesita), y se reintroduce la función objetiva original.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{o bien,} \qquad z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Puesto que x_1 y x_2 están ambas en la base óptima de la fase 1, deben ser eliminadas del renglón 0 de la fase II. Se suma 3(renglón 2) + 2(renglón 3) del tableau óptimo de la fase I al renglón 0.

$$
\begin{array}{lr}
\text{Renglón 0 de la fase II:} & z - 2x_1 - 3x_2 \qquad\quad = 0\\
+\ \text{Renglón 2:} & 3x_2 - \tfrac{3}{2}e_2 = 15\\
+\ \text{Renglón 3:} & 2x_1 \qquad\quad + e_2 = 10\\
=\ \text{Nuevo renglón 0:} & z \qquad\qquad\qquad - \tfrac{1}{2}e_2 = 25
\end{array}
$$

Se empieza entonces la fase II con el conjunto de ecuaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
\min z - \tfrac{1}{2}e_2 &= 25\\
s_1 - \tfrac{1}{8}e_2 &= \tfrac{1}{4}\\
x_2 \quad - \tfrac{1}{2}e_2 &= 5\\
x_1 \qquad + \tfrac{1}{2}e_2 &= 5
\end{aligned}
$$

TABLA 38
Tableau inicial de la fase I para Bevco

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	2	4	0	-1	0	0	30	$w' = 30$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

TABLA 39
Tableau de la fase I para Bevco después de una iteración

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$w' = \frac{10}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1 = \frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2 = \frac{20}{3}$	20*
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3 = \frac{10}{3}$	5*

TABLA 40
Tableau óptimo de la fase I para Bevco

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	0	0	0	0	-1	-1	0	$w' = 0$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

Este conjunto es óptimo. Por consiguiente, en este problema, la fase II no requiere pivoteos para llegar a una solución óptima. Si el renglón 0 de la fase II no indica un tableau óptimo, entonces se prosigue simplemente con el simplex hasta que se obtenga un renglón 0. En resumen, el tableau óptimo de la fase II indica que la solución óptima para el problema de Bevco es $z = 25$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $s_1 = \frac{1}{4}$ y $e_2 = 0$. Ésta va de acuerdo, naturalmente, con la solución óptima que se determinó por medio del método de la gran M de la sección 4.12.

EJEMPLO 6 Simplex de dos fases: caso 1

Para ilustrar el caso 1, se modificará el problema de Bevco, de tal manera que se requieran 36 mg de vitamina C. Ya se sabe, por la sección 4.12, que este problema es no factible. Esto quiere decir que la solución óptima de la fase I debe tener $w' > 0$ (caso 1). Con el fin de demostrar que esto es verdadero, se empieza con el problema original:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\le 4 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

TABLA 41

Tableau inicial de la fase I para Bevco (no factible)

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable Básica	Cociente
1	2	4	0	−1	0	0	46	$w' = 46$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	−1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 0$	10*

TABLA 42

Tableau que indica ausencia de factibilidad para Bevco (no factible)

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	−2	0	0	−1	0	−4	6	$w' = 6$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	−2	0	0	−1	1	−3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

Solución Tras completar los pasos 1 a 4 del simplex de dos fases, se obtiene el problema de fase I siguiente:

$$\begin{aligned} \min w' &= a_2 + a_3 \\ \text{s.a} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 \\ & x_1 + x_2 + a_3 = 10 \end{aligned}$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, se encuentra que la sfb inicial de la fase I es $s_1 = 4$, $a_2 = 36$, y $a_3 = 10$. Como las variables básicas a_2 y a_3 se presentan en la función objetivo de la fase I se deben eliminar del renglón 0 de la fase I. Para hacerlo se suman los renglones 2 y 3 al renglón 0:

$$\begin{aligned} &+ \text{Renglón 0:} && w' - a_2 - a_3 = 0 \\ &+ \text{Renglón 2:} && x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 \\ &+ \text{Renglón 3:} && x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\ &= \text{Nuevo Renglón 0:} && w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 = 46 \end{aligned}$$

Con este nuevo renglón 0, el tableau inicial de la fase I es el que se muestra en la tabla 41. Como $4 > 2$, entonces se debe introducir x_2 a la base en el renglón 3, con lo que se obliga a a_3 a dejar la base. Este tableau resultante se proporciona en la tabla 42. Ninguna variable tiene coeficiente positivo en el renglón 0, así que éste es un tableau óptimo de la fase I, y como el valor óptimo de w' es $6 > 0$, el PL original debe tener solución no factible. Lo anterior es razonable, porque si el PL original tuviera una solución factible, ésta habría sido factible en el PL de la fase I (después de hacer $a_2 = a_3 = 0$). Esta solución factible habría dado $w' = 0$. Como el simplex no pudo encontrar una solución de la fase I con $w' = 0$, el PL debe tener solución no factible.

OBSERVACIONES 1 Al igual que en el método de la gran M, se podría eliminar la columna para cualquier variable artificial en los tableaus futuros tan pronto como la variable artificial deja la base. Por lo tanto, cuando se resolvió el problema de Bevco, la columna de a_2 pudo suprimirse después del primer pivoteo de la fase I, y la de a_3 pudo eliminarse después del segundo pivoteo de la fase I.

2 Se puede demostrar que (exceptuando los vínculos para la variable entrante y en la prueba del cociente) el método de la gran M y la fase I del método de las dos fases efectúan la misma sucesión de pivoteos. A pesar de esta equivalencia, la mayoría de los códigos para computadora utiliza el método de las dos fases para encontrar una sfb. Esto se debe a que M, por ser un número positivo grande, podría ocasionar errores de redondeo y otras dificultades de cálculo. El método de las dos fases no introduce ningún número grande en la función objetivo, por lo que se evitan estos problemas.

EJEMPLO 7 Simplex de dos fases: caso 3

Resuelva el PL siguiente por medio del método simplex de dos fases:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 40x_1 + 10x_2 + 7x_5 + 14x_6 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\
& -2x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \\
& x_1 + x_3 + x_5 - x_6 = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\
& \text{Toda } x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución Se podría utilizar x_4 como una variable básica para la cuarta restricción, y las variables artificiales a_1, a_2 y a_3 como variables básicas para las primeras tres restricciones. El objetivo en la fase I es minimizar $w = a_1 + a_2 + a_3$. Después de sumar las primeras tres restricciones a $w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$ se obtiene el tableau inicial de la fase I, el cual se muestra en la tabla 43.

Aun cuando x_5 tiene el coeficiente más positivo en el renglón 0, se elige introducir x_3 a la base (como una variable básica en el renglón 3). Se observa que inmediatamente se obtiene $w = 0$. El tableau final de la fase I se proporciona en la tabla 44.

Como $w = 0$, se tiene ya un tableau óptimo de la fase I. Dos variables artificiales (a_1 y a_2) permanecen en la base en un nivel cero. Ya se podría eliminar la variable artificial a_3 en el primer tableau de la fase II. La única variable original con un coeficiente negativo en el tableau óptimo de la fase I es x_1, así que se podría suprimir x_1 de todos los tableaus futuros. Esto se debe a que a partir del tableau óptimo de la fase I se encuentra que $w = x_1$. Esto quiere decir que x_1 nunca se volverá positiva en la fase II, por lo que se podría suprimir x_1 de todos los tableaus futuros. Como $z - 40x_1 - 10x_2 - 7x_5 - 14x_6 = 0$ no contiene ninguna variable básica, el tableau inicial para la fase II es como el de la tabla 45.

TABLA 43

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	0	0	1	0	1	−1	0	0	0	3	$w = 3$
0	1	−1	0	0	2	0	1	0	0	0	$a_1 = 0$
0	−2	1	0	0	−2	0	0	1	0	0	$a_2 = 0$
0	1	0	1	0	1	−1	0	0	1	3	$a_3 = 3$
0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	4	$x_4 = 4$

TABLA 44

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	$w = 0$
0	1	−1	0	0	2	0	1	0	0	0	$a_1 = 0$
0	−2	1	0	0	−2	0	0	1	0	0	$a_2 = 0$
0	1	0	1	0	1	−1	0	0	1	3	$x_3 = 3$
0	−1	2	0	1	1	2	0	0	1	1	$x_4 = 1$

TABLA 45

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	Ld	Variables básicas
1	−10	0	0	−7	−14	0	0	0	$z = 0$
0	−1	0	0	2	0	1	0	0	$a_1 = 0$
0	1	0	0	−2	0	0	1	0	$a_2 = 0$
0	0	1	0	1	−1	0	0	3	$x_3 = 3$
0	2	0	1	1	2	0	0	1	$x_4 = 1$

TABLA 46

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	Ld	Variables básicas
1	4	0	7	0	0	0	0	7	$z_1 = 7$
0	0	0	0	2	0	1	0	0	$a_1 = 0$
0	1	0	0	0	0	0	1	0	$a_2 = 0$
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$	$x_3 = \frac{7}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$x_4 = \frac{1}{2}$

Ahora se introduce x_6 a la base en el renglón 4 y se obtiene el tableau óptimo que se muestra en la tabla 46.

La solución óptima del PL original es $z = 7, x_3 = 7/2, x_4 = \frac{1}{2}, x_2 = x_5 = x_6 = x_3 = 0$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva los problemas de la sección 4.12 por medio del método simplex de dos fases.

2 Explique por qué el PL de la fase I tiene por lo regular soluciones óptimas alternativas.

4.14 Variables sin restricción de signo

Al resolver el PL con el algoritmo simplex se utiliza la prueba del cociente para determinar el renglón en el cual la variable que entra se vuelve una variable básica. Recuerde que la prueba del cociente depende del hecho de que cualquier punto factible requería que todas las variables fueran no negativas. Por lo tanto, si se permite que algunas variables no tengan restricciones de signo (nrs), la prueba del cociente y, por consiguiente, el algoritmo simplex ya no tienen validez. En esta sección se demuestra cómo un PL con variables que no tienen restricciones de signo (o variables irrestrictas) se pueden transformar en un PL en el cual se requiere que todas las variables sean negativas.

Se empieza por definir dos variables nuevas x_i' y x_i'' por cada variable nrs x_i. Luego se sustituye $x_i' - x_i''$ por x_i en cada restricción y en la función objetivo. Se suman asimismo las restricciones de signo $x_i' \geq 0$ y $x_i'' \geq 0$. El objetivo de esta sustitución es expresar x_i como la diferencia de las dos variables no negativas x_i' y x_i''. Como ahora se requiere que todas las variables sean no negativas, ya se puede proseguir con el simplex. Pronto se verá que ninguna solución factible básica puede tener tanto $x_i' > 0$ como $x_i'' > 0$. Esto quiere decir que para cualquier solución factible básica, cada variable nrs x_i debe encontrarse en cualquiera de los siguientes tres casos:

Caso 1 $x_i' > 0$ y $x_i'' = 0$. Este caso se presenta si una sfb tiene $x_i > 0$. En este caso, $x_i = x_i' - x_i'' = x_i'$. Por lo tanto, $x_i = x_i'$. Por ejemplo, si $x_i = 3$ en una sfb, esto se indicará por $x_i' = 3$ y $x_i'' = 0$.

Caso 2 $x_i' = 0$ y $x_i'' > 0$. Ocurre si $x_i < 0$. Como, $x_i = x_i' - x_i''$ se obtiene $x_i = -x_i''$. Por ejemplo, si $x_i = -5$ en una sfb, se tendrá $x_i' = 0$ y $x_i'' = 5$. Entonces, $x_i = 0 - 5 = -5$.

Caso 3 $x_i' = x_i'' = 0$. En este caso $x_i = 0 - 0 = 0$.

Al resolver el siguiente ejemplo se prende por qué ninguna sfb puede tener tanto $x_i' > 0$ como $x_i'' > 0$.

EJEMPLO 8 Uso de las variables nrs

Un panadero tiene 30 onzas de harina y 5 paquetes de levadura. Para hornear una hogaza de pan necesita 5 onzas de harina y 1 paquete de levadura. Cada hogaza de pan se puede vender en 30 centavos. El panadero podría comprar más harina a 4 centavos por onza o vender el sobrante de harina al mismo precio. Plantee y resuelva un PL para ayudar al panadero a maximizar la utilidad (ingresos − costos).

Solución Defina

x_1 = cantidad de hogazas de pan horneadas

x_2 = cantidad de onzas en que se incrementa el suministro de harina por las transacciones en efectivo.

Por lo tanto, $x_2 > 0$ significa que se compraron x_2 onzas de harina, y $x_2 < 0$ quiere decir que $-x_2$ onzas de harina se vendieron ($x_2 = 0$ significa que ni se vendió ni se compró harina). Después de observar que $x_1 \geq 0$ y que x_2 no tiene restricciones de signo, el PL apropiado es

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a} \quad 5x_1 &\leq 30 + x_2 \qquad \text{(Restricción de la harina)} \\ x_1 &\leq 5 \qquad \text{(Restricción de la levadura)} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \text{ urs} \end{aligned}$$

Como x_2 es irrestricta, es decir, no tiene restricciones de signo, se sustituye $x_2' - x_2''$ por x_2 en la función objetivo y las restricciones. Así se obtiene

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 - 4x_2' + 4x_2'' \\ \text{s.a} \quad 5x_1 &\leq 30 + x_2' - x_2'' \\ x_1 &\leq 5 \\ x_1, x_2', x_2'' &\geq 0 \end{aligned}$$

Después de transformar la función objetivo en la forma de renglón 0 y sumar variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones, se llega al tableau inicial de la tabla 47. Note que la columna de x_2' es simplemente la negativa de la columna x_2''. Ya se verá que *no importa cuántos pivoteos se efectúen, la columna x_2' será siempre la negativa de la columna x_2''.* (Véase una demostración de esta afirmación en el problema 6.)

Como x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, x_1 entra a la base (en el renglón 2). El tableau resultante se muestra en la tabla 48. Observe que, nuevamente, la columna de x_2' es la negativa de la columna de x_2''.

Puesto que x_2'' tiene ahora el coeficiente más negativo en el renglón 0, entonces se introduce a la base en el renglón 1. El resultado se ilustra en la tabla 49. Observe que la columna de x_2' todavía es la negativa de la columna de x_2''. Éste es un tableau óptimo, así que la solución óptima al problema del panadero es $z = 170, x_1 = 5, x_2'' = 5, x_2' = 0, s_1 = s_2 = 0$. Por lo tanto, es posible que el panadero tenga una utilidad de 170 centavos por hornear 5 hogazas de pan. Como $x_2 = x_2' - x_2'' = 0 - 5 = -5$, el panadero debe vender 5 oz de

TABLA 47
Tableau inicial para PL nrs

z	x_1	x'_2	x''_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−30	4	−4	0	0	0	$z = 0$	
0	5	−1	1	1	0	30	$s_1 = 30$	6*
0	1	0	0	0	1	5	$s_2 = 5$	5*

TABLA 48
Tableau inicial para PL nrs

z	x_1	x'_2	x''_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	4	−4	0	30	150	$z = 150$	
0	0	−1	1	1	−5	5	$s_1 = 5$	5*
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$	Ninguno

TABLA 49
Tableau óptima para PL nrs

z	x_1	x'_2	x''_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica
1	0	0	0	4	10	170	$z = 170$
0	0	−1	1	1	−5	5	$x''_2 = 5$
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$

harina. Lo óptimo para el panadero es vender harina, porque al tener 5 paquetes de levadura limita la elaboración de pan a cuando mucho 5 hogazas. Estas 5 hogazas de pan utilizan $5(5) = 25$ oz de harina, de tal manera que $30 - 25 = 5$ oz de harina quedan para vender.

Las variables x'_2 y x''_2 nunca serán ambas variables básicas en el mismo tableau. Para ver por qué, suponga que x''_2 es básica (como es en el arreglo óptimo). Entonces la columna de x''_2 contendrá un solo 1, y todas las otras entradas serán iguales a cero. La columna x'_2 es siempre la negativa de la columna x''_2, así que la columna x'_2 contendrá un solo -1 y todas las otras entradas serán iguales a cero. Dicho tableau no puede tener x'_2 como una variable factible básica. El mismo razonamiento señala que si x_i es nrs, entonces x'_i y x''_i no pueden ser ambas variables básicas en el mismo tableau. Esto quiere decir que x'_i, x''_i o ambas deben ser iguales a cero y que se puede presentar uno de los casos 1 a 3.

Mediante el ejemplo siguiente se ilustra cómo las variables nrs se pueden usar para modelar los costos de suavización de la producción de los que se hablaba en la sección 3.10.

EJEMPLO 9 Modelo de los costos de la suavización de la producción

Mondo Motorcycles está determinando su programa de producción para los cuatro trimestres siguientes. La demanda motocicletas es como se indica: trimestre 1, 40; trimestre 2, 70; trimestre 3, 50; trimestre 4, 20. Mondo tiene cuatro tipos de costos.

1 Manufacturar una motocicleta cuesta 400 dólares a Mondo.

2 Se incurre en un costo de 100 dólares por cada motocicleta que se conserva al final de cada trimestre.

3 Incrementar la producción desde un trimestre al siguiente genera costos por la capacitación de los empleados. Se estima que se incurre en un costo por motocicleta de 700 dólares si la producción aumenta de un trimestre al otro.

4 Reducir la producción de un trimestre al otro incurre en costos por el pago de la indemnización, la baja moral, etc. Se estima que se genera un costo de 600 dólares por motocicleta si la producción disminuye de un trimestre al otro.

Toda la demanda se debe cumplir a tiempo, y la producción de un trimestre se podría utilizar para cumplir con la demanda del trimestre actual. Durante el trimestre inmediatamente anterior al trimestre 1, se fabricaron 50 motocicletas. Suponga que al inicio del trimestre 1 no hay Mondos en inventario. Plantee un PL que minimice el costo total de Mondo durante los cuatro trimestres siguientes.

Solución Para expresar el inventario y los costos de producción se definen para $t = 1, 2, 3, 4$,

$$p_t = \text{número de motocicletas producidas durante el trimestre } t$$
$$i_t = \text{inventario al final del trimestre } t$$

Con el fin de determinar los costos de suavización (costos 3 y 4) se define

x_t = cantidad con la que la producción del trimestre t es superior a la producción del trimestre $t - 1$

Como x_t no tiene restricción de signo, se podría escribir $x_t = x_t' - x_t''$, donde $x_t' \geq 0$ y $x_t'' \geq 0$. Se sabe que si $x_t \geq 0$, entonces $x_t = x_t'$ y $x_t'' = 0$. Asimismo, si $x_t \leq 0$, entonces $x_t = -x_t''$ y $x_t' = 0$. Esto quiere decir que

x_t' = incremento en la producción del trimestre t sobre la producción del trimestre $t - 1$

($x_t' = 0$ si la producción del periodo t es menor que la producción del periodo $t - 1$)

x_t'' = decremento en la producción del trimestre t a partir de la producción del trimestre $t - 1$

($x_t' = 0$ si la producción del periodo t es mayor que la producción del periodo $t - 1$)

Por ejemplo, si $p_1 = 30$ y $p_2 = 50$, se tiene $x_2 = 50 - 30 = 20$, $x_2' = 20$, $x_2'' = 0$. De manera similar, si $p_1 = 30$ y $p_2 = 15$, se llega a $x_2 = 15 - 30 = -15$, $x_2' = 0$, y $x_2'' = 15$. Ahora se pueden usar las variables x_t' y x_t'' para expresar los costos de suavización por trimestre t.

Ahora ya se puede expresar el costo total de Mondo como

$$\begin{aligned}\text{Costo total} &= \text{costo de producción} + \text{costos por inventario}\\ &\quad + \text{costo de suavización debido al incremento de producción}\\ &\quad + \text{costo de suavización debido al decremento de producción}\\ &= 400(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + 100(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)\\ &\quad + 700(x_1' + x_2' + x_3' + x_4') + 600(x_1'' + x_2'' + x_3'' + x_4'')\end{aligned}$$

Para completar el planteamiento, se suman dos tipos de restricciones. Primero se requieren restricciones de inventario (como en el problema de Sailco de la sección 3.10) que relaciona el inventario del trimestre actual con el inventario del trimestre anterior y la producción del trimestre actual. Para el trimestre t, las restricciones de inventario toman la forma

$$\begin{aligned}\text{Inventario del trimestre} &= (\text{inventario del trimestre } (t-1)) + (\text{producción del trimestre } t)\\ &\quad - (\text{demanda del trimestre } t)\end{aligned}$$

Para $t = 1, 2, 3, 4$, respectivamente, se llega a las cuatro restricciones siguientes:

$$i_1 = 0 + p_1 - 40 \qquad i_2 = i_1 + p_2 - 70$$
$$i_3 = i_2 + p_3 - 50 \qquad i_4 = i_3 + p_4 - 20$$

Las restricciones de signo $i_t \geq 0$ ($t = 1, 2, 3, 4$) aseguran que la demanda de cada trimestre se cumplirá justo a tiempo.

El segundo tipo de restricción refleja el hecho de que están relacionadas p_t, p_{t-1}, x'_t, y x''_t. Esta relación se refleja en

$$\text{(producción del trimestre } t) - \text{(producción del trimestre } (t-1)) = x_t = x'_t - x''_t$$

Esta relación origina las cuatro restricciones siguientes para $t = 1, 2, 3, 4$:

$$p_1 - 50 = x'_1 - x''_1 \qquad p_2 - p_1 = x'_2 - x''_2$$
$$p_3 - p_2 = x'_3 - x''_3 \qquad p_4 - p_3 = x'_4 - x''_4$$

Al combinar la función objetivo, las cuatro restricciones del inventario, las últimas cuatro restricciones y las restricciones de signo ($i_t, p_t, x'_t, x''_t \geq 0$ para $t = 1, 2, 3, 4$) se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 400p_1 + 400p_2 + 400p_3 + 400p_4 + 100i_1 + 100i_2 + 100i_3 + 100i_4 \\
& + 700x'_1 + 700x'_2 + 700x'_3 + 700x'_4 + 600x''_1 + 600x''_2 + 600x''_3 + 600x''_4 \\
\text{s.a} \quad & i_1 = 0 + p_1 - 40 \\
& i_2 = i_1 + p_2 - 70 \\
& i_3 = i_2 + p_3 - 50 \\
& i_4 = i_3 + p_4 - 20 \\
& p_1 - 50 = x'_1 - x''_1 \\
& p_2 - p_1 = x'_2 - x''_2 \\
& p_3 - p_2 = x'_3 - x''_3 \\
& p_4 - p_3 = x'_4 - x''_4 \\
& i_t, p_t, x'_t, x''_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo 7, la columna para x'_t en las restricciones es la negativa de la columna x''_t. Por lo tanto, como en el ejemplo 7, ninguna sfb del PL de Mondo puede tener tanto $x'_t > 0$ como $x''_t > 0$. Esto quiere decir que x'_t en realidad es el incremento de la producción durante el trimestre t, y que x''_t de hecho es la cantidad que disminuye la producción durante el trimestre t.

Hay otra manera de mostrar que la solución óptima no tendrá tanto $x'_t > 0$ como $x''_t > 0$. Suponga que, por ejemplo, $p_2 = 70$ y $p_1 = 60$. Entonces, la restricción

$$p_2 - p_1 = 70 - 60 = x'_2 - x''_2 \tag{20}$$

se puede cumplir con muchas combinaciones de x'_2 y x''_2. Por ejemplo, $x'_2 = 10$ y $x''_2 = 0$ satisface a (20), así como $x'_2 = 20$ y $x''_2 = 10$; $x'_2 = 40$ y $x''_2 = 30$; etcétera. Si $p_2 - p_1 = 10$, la solución óptima del PL siempre elegirá $x'_2 = 10$ y $x''_2 = 0$ y ninguna otra posibilidad. Para entender por qué, examine la función objetivo. Si $x'_2 = 10$ y $x''_2 = 0$, entonces x'_2 y x''_2 contribuyen con $10(700) = 7\,000$ dólares en los costos de suavización. Por otro lado, cualquier otra elección de x'_2 y x''_2 que satisfaga (20) contribuye con más que 7 000 dólares en los costos de suavización. Por ejemplo, $x'_2 = 20$ y $x''_2 = 10$ contribuye con $20(700) + 10(600) = 20\,000$ dólares en los costos de suavización. Como se está minimizando el costo total, el simplex nunca escogerá una solución donde se cumplan tanto $x'_t > 0$ como $x''_t > 0$.

La solución óptima para el problema de Mondo es $p_1 = 55, p_2 = 55, p_3 = 50, p_4 = 50$. Con esta solución, se genera un costo total de 95 000. Con el programa de producción óptima se fabrica un total de 210 Mondos. Como la demanda total para los cuatro trimestres es de sólo 180 Mondos, habrá un inventario final de $210 - 180 = 30$ Mondos. Obsérvese que esto contrasta con el modelo del inventario de Sailco de la sección 3.10, en el cual el inventario final era siempre 0. La solución óptima para el problema de Mondo tiene un inventario no cero en el trimestre 4, entonces, como el inventario es cero en el trimestre 4, la producción del trimestre 4 debe ser menor que la del trimestres 3. Antes que incurrir en los costos de suavización excesivos con los que se relaciona esta estrategia, la solución óptima prefiere conservar 30 Mondos en inventario al final del trimestre 4.