16

Modelos probabilísticos de inventarios

Todos los modelos de inventarios estudiados en el capítulo 15 requieren que la demanda durante cualquier periodo se conozca con certeza. En este capítulo se tratan los modelos de inventario en los cuales la demanda es incierta o aleatoria en un periodo dado; modelos de inventario único donde un problema finaliza una vez que se toma la decisión de un solo pedido; modelos de licitación única; versiones del modelo EOQ para demanda incierta que incorporan los conceptos importantes de existencias de seguridad y nivel de servicio; el modelo de la revisión periódica (R, S); el sistema de clasificación de inventario ABC y curvas de cambio.

16.1 Modelos de decisión única

En muchas situaciones, el que toma las decisiones se enfrenta al problema de determinar el valor q de una variable (q podría ser la cantidad ordenada de un bien inventariado, por ejemplo, o la oferta sobre un contrato). Después de determinar q, se observa el valor d que asume una variable aleatoria $\mathbf{D}$. El que toma las decisiones genera un costo $c(d, q)$, lo cual depende de los valores de d y q. Suponemos que la persona es neutral en cuanto al riesgo y quiere elegir q para reducir al mínimo su costo esperado. Como la decisión se toma una sola vez, un modelo de este tipo se llama *modelo de decisión única.*

16.2 Concepto de análisis marginal

En el modelo de decisión única que se trató en la sección 16.1, se supone que $\mathbf{D}$ es una variable aleatoria discreta de valores enteros con $P(\mathbf{D} = d) = p(d)$. Sea $E(q)$ el costo esperado de quien toma las decisiones si se elige q. Entonces

$$E(q) = \sum_{d} p(d)c(d, q)$$

En la mayor parte de las aplicaciones prácticas, $E(q)$ es una función convexa de q. Sea q^* el valor de q que minimiza $E(q)$. Si $E(q)$, es una función convexa, la gráfica de $E(q)$ debe parecerse a la figura 1. Según la figura, se ve que q^* es el valor mínimo de q para el cual

$$E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0 \tag{1}$$

Por lo tanto, si $E(q)$, es una función convexa de q es posible determinar el valor de q que minimice el costo esperado estimando el valor más pequeño de q que satisface la Desigualdad (1). Obsérvese que $E(q + 1) - E(q)$ es el cambio en el costo esperado que se presenta si se incrementa la variable de decisión q a $q + 1$.

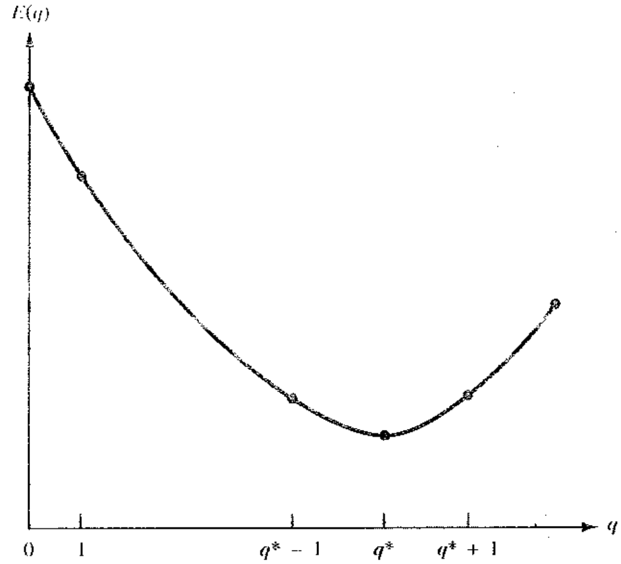


FIGURA 1
Determinación de q^* mediante análisis marginal

Para determinar q^*, se empieza con $q = 0$. Si $E(1) - E(0) \leq 0$, entonces es posible lograr un beneficio al incrementar q desde 0 hasta 1. Ahora se verifica que $E(2) - E(1) \leq 0$. Si se cumple, entonces el incremento de q desde 1 hasta 2 reducirá el costo esperado. Si se continúa de este modo se observa que al incrementar q una unidad se reducirán los costos esperados hasta el punto donde se trata de incrementar q desde q^* hasta $q^* + 1$. En este caso, al incrementar q una unidad aumentará el costo esperado. Según la figura 1 (la cual es la apropiada si $E(q)$, es una función convexa), se observa que si $E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0$, entonces para $q \geq q^*$, $E(q + 1) - E(q) \geq 0$. Por lo tanto, q^* debe ser el valor de q que minimice $E(q)$, Si $E(q)$ no es convexa, quizá este razonamiento no funcione. (Véase el problema 1 al final de esta sección.)

Este método determina q^* mediante el cálculo repetido del efecto de sumar una unidad marginal al valor de q. Por esta razón se denomina a menudo **análisis marginal**. Este método se utiliza si es fácil determinar una expresión simple para $E(q + 1) - E(q)$. En la sección siguiente se aplica el análisis marginal para resolver el problema clásico del vendedor de periódicos.

PROBLEMA

Grupo A

1 Suponga que $E(q)$ es $E(0) = 8$, $E(1) = 6$, $E(2) = 5$, $E(3) = 7$, $E(4) = 6$, $E(5) = 5.5$, $E(6) = 4.5$, y $E(7) = 5$.

a ¿Qué valor de q minimiza $E(q)$?

b Si se utiliza el análisis marginal para determinar el valor de q que minimiza $E(q)$, ¿cuál es la respuesta?

c Explique por qué el análisis marginal no determina el valor de q que minimiza $E(q)$.

16.3 El problema del vendedor de periódicos: demanda discreta

Las empresas enfrentan a menudo problemas de inventario en los que se presenta la sucesión de eventos siguiente:

1 La compañía decide cuántas unidades pedir. Representemos con q la cantidad de unidades pedidas.

2 Con probabilidad $p(d)$ se presenta una demanda de d unidades. En esta sección se supone que d tiene que ser un entero no negativo. Sea **D** la variable aleatoria que representa la demanda.

3 Se genera un costo $c(d, q)$ que depende de d y q.

Los problemas que siguen esta secuencia reciben a menudo el nombre de **problemas del vendedor de periódicos**. Para ver por qué, considere un vendedor que tiene que decidir cuántos periódicos pedir cada día en el expendio de periódicos. Si el vendedor pide demasiados periódicos, acabará el día con varios periódicos sin valor alguno. En cambio, si un vendedor pide muy pocos periódicos, perderá ganancias que podía haber obtenido si hubiera pedido los suficientes para cumplir con la demanda que le hubieran pedido los clientes, y además, los clientes estarán disgustados. El vendedor tiene que pedir la cantidad de periódicos que equilibre en forma adecuada estos dos costos. Otro problema del vendedor de periódicos se estudia en la sección 13.1 cuando se trata la teoría de decisiones.

En esta sección se muestra cómo utilizar el análisis marginal para resolver problemas del vendedor de periódicos cuando la demanda es una variable aleatoria discreta y $c(d, q)$ tiene la forma siguiente:

$$c(d, q) = c_o q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \leq q) \tag{2}$$

$$c(d, q) = -c_u q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \geq q + 1) \tag{2.1}$$

El costo por unidad por tener existencias excesivas es c_o en (2). Si $d \leq q$, se ha pedido más de lo que es la demanda, es decir, se tiene un surtido excesivo (abarrotamiento). Si el tamaño del pedido se incrementa desde q hasta $q + 1$, entonces (2) muestra que el costo se incrementa en c_o. Por lo tanto, c_o es el costo debido a tener un exceso de existencias igual a una unidad extra. A c_o se le conoce como **costo por existencias excesivas**. Si $d \geq q + 1$, entonces hay falta de surtido (se pidió una cantidad menor que la demanda). Si $d \geq q + 1$, y se pide una unidad más, hay una falta de existencias, pero ya falta una unidad menos. Entonces (2.1) implica que el costo disminuye en c_u, de modo que c_u es el costo por unidad por tener inventario menor al necesario. A c_u se le llama **costo por falta de inventario**.

Con el objeto de deducir mediante el análisis marginal la cantidad óptima para el pedido, sea $E(q)$ el costo esperado si se coloca un pedido de q unidades. Suponga que la meta de quien toma las decisiones es determinar el valor de q^* que minimice $E(q)$. Si $c(d, q)$ puede describirse mediante (2) y (2.1), y $E(q)$ es una función convexa de q, entonces sí se puede utilizar el análisis marginal para determinar q^*.

A raíz de (1), hay que determinar el valor mínimo de q para el cual $E(q + 1) - E(q) \geq 0$. Se tienen que considerar las dos posibilidades siguientes para calcular $E(q + 1) - E(q)$:

Caso 1 $d \leq q$. En este caso, al ordenar $q + 1$ unidades en lugar de q unidades se ocasiona que haya un exceso de existencias con una unidad de más. Esto incrementa el costo en c_o. La probabilidad de que se presente el caso 1 es simplemente $P(\mathbf{D} \leq q)$, donde $\mathbf{D}$ es la variable aleatoria que representa la demanda.

Caso 2 $d \geq q + 1$. En este caso, pedir $q + 1$ unidades en lugar de q unidades, posibilita que falte una unidad menos. Esto disminuye el costo en c_u. La probabilidad de que ocurra el caso 2 es $P(\mathbf{D} \geq q + 1) = 1 - P(\mathbf{D} \leq q)$.

En resumen, una fracción $P(\mathbf{D} \leq q)$ del tiempo, ordenar $q + 1$ unidades costará c_o más que ordenar q unidades; y una fracción $1 - P(\mathbf{D} \leq q)$ de las veces, ordenar $q + 1$ unidades costará un costo c_u menos que pedir q unidades. Por lo tanto, en promedio, ordenar $q + 1$ unidades costará

$$c_o\, P(\mathbf{D} \leq q) - c_u[1 - P(\mathbf{D} \leq q)]$$

más que pedir q unidades.

Se ha demostrado con más formalidad que

$$\begin{aligned} E(q + 1) - E(q) &= c_o\, P(\mathbf{D} \leq q) - c_u[1 - P(\mathbf{D} \leq q)] \\ &= (c_o + c_u)\, P(\mathbf{D} \leq q) - c_u{}^{\dagger} \end{aligned}$$

†Como $P(\mathbf{D} \leq q)$ se incrementa cuando q aumenta, $E(q + 1) - E(q)$ se incrementará a medida que q aumente. Por lo tanto, si $c_o + c_u \geq 0$, $E(q)$ es una función convexa de q, por lo que se justifica el uso del análisis marginal.

Entonces $E(q + 1) - E(q) \geq 0$ se cumplirá si

$$(c_o + c_u)\, P(\mathbf{D} \leq q) - c_u \geq 0 \qquad \text{o} \qquad P(\mathbf{D} \leq q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u}$$

Sea $F(q) = P(\mathbf{D} \leq q)$ la función de la distribución de la demanda. Puesto que el análisis marginal se puede aplicar, ya mostramos que $E(q)$ será minimizada mediante el valor más pequeño de q (llamado q^*) que satisface

$$F(q^*) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{3}$$

El uso de (3) se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Ventas de calendarios en Walton Bookstore

Walton Bookstore tiene que decidir en agosto cuántos calendarios acerca de la naturaleza debe pedir para el año próximo. Cada calendario le cuesta a la tienda 2 dólares, y se vende en 4.50 dólares. Todos los calendarios que no se hayan vendido el primero de enero se regresan al editor, quien reembolsa 75 centavos por calendario. Walton opina que la cantidad de calendarios vendidos al primero de enero sigue la distribución de probabilidad que se muestra en la tabla 1. Walton desea maximizar la utilidad neta esperada por las ventas de los calendarios. ¿Cuántos calendarios debe pedir la librería en agosto?[†]

Solución Sean

q = cantidad de calendarios pedidos en agosto

d = cantidad de calendarios demandados antes del primero de enero

Si $d \leq q$, se generan los costos que se muestran en la tabla 2 (los ingresos son un costo negativo). Según (2), $c_o = 1.25$.

Si $d \geq q + 1$, se generan los costos mostrados en la tabla 3. De acuerdo con (2), $-c_u = -2.5$ o $c_u = 2.50$. Entonces,

$$\frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{2.50}{3.75} = \frac{2}{3}$$

TABLA 1
Función de la masa de probabilidad para la venta de calendarios

No. de calendarios vendidos	Probabilidad
100	.30
150	.20
200	.30
250	.15
300	.05

TABLA 2
Cálculo de los costos totales si $d \leq q$

	Costo
Compra de q calendarios a 2 dólares por calendario	$2q$
Venta de d calendarios a 4.50 dólares por calendario	$-4.50d$
Devolución de $q - d$ calendarios a 75 centavos por calendario	$-0.75(q - d)$
Costo total	$1.25q - 3.75d$

[†]Basado en Barron (1985).

TABLA 3

Cálculo del costo total si $d \geq q + 1$

	Costo
Compra de q calendarios a 2 dólares por calendario	$2q$
Venta de d calendarios a 4.50 dólares por calendario	$-4.50q$
Costo total	$-2.50q$

De acuerdo con (3), Walton debería ordenar q^* calendarios, donde q^* es el número más pequeño para el cual $P(\mathbf{D} \leq q^*) \geq \frac{2}{3}$. Como una función de q, $P(\mathbf{D} \leq q)$ se incrementa sólo cuando $q = 100, 150, 200, 250$, o 300. Asimismo, obsérvese que $P(\mathbf{D} \leq 100) = .30$, $P(\mathbf{D} \leq 150) = .50$ y $P(\mathbf{D} \leq 200) = .80$. Puesto que $P(\mathbf{D} \leq 200)$ es mayor que o igual a $\frac{2}{3}$, $q^* = 200$ calendarios son los que se deben pedir.

OBSERVACIONES

1 En términos de análisis marginal, la probabilidad de vender el calendario número 200 que se ordena es $P(\mathbf{D} \geq 200) = .50$. Esto implica que el calendario número 200 tiene una probabilidad de $1 - .50 = .50$ de no ser vendido. Por lo tanto, el calendario número 200 incrementará los costos esperados de Walton en $.50(-2.50) + .50(1.25) = -0.625$ dólares. Por lo tanto, el calendario número 200 debe ser pedido. Por otro lado, la probabilidad de que el calendario número 201 sea vendido es $P(\mathbf{D} \geq 201) = .20$, y la probabilidad de que este mismo calendario no se venda es $1 - .20 = .80$. Por lo tanto, el calendario número 201 incrementará los costos esperados en $.20(-2.50) + .80(1.25) = 0.50$ dólares. Por lo tanto, el calendario número 201 incrementará los costos esperados, y ya no se debe pedir.

2 En el ejemplo 2 se podría haber estimado c_o y c_u sin recurrir a (2) y (2.1). Por ejemplo, una unidad más sobre la demanda actual incrementa los costos de Walton en $2 - 0.75 = 1.25$ dólares. Por lo tanto, $c_u = 1.25$ dólares. De igual modo, que una unidad más esté abajo de la demanda real, costará a Walton $4.50 - 2.00 = 2.50$ dólares en utilidad. Por consiguiente, $c_u = 2.50$ dólares. Si somos capaces de determinar c_o y c_u sin usar las ecuaciones (2) y (2.1), debemos hacerlo. No obstante, dichas ecuaciones son muy útiles en problemas más difíciles (véanse ejemplos 2 y 3).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un vendedor de automóviles trata de determinar en agosto de 2003 cuántos modelos 2004 debe pedir. Cada automóvil cuesta al vendedor 10 000 dólares. La demanda de modelos 2004 del vendedor tiene la distribución de probabilidad de la tabla 4. Cada automóvil se vende en 15 000 dólares. Si la demanda de automóviles 2004 excede la cantidad de vehículos pedidos en agosto, el vendedor debe hacer otro pedido a un costo de 12 000 dólares por vehículo. Si la demanda de automóviles 2004 es poca, el vendedor debe deshacerse del exceso de vehículos en una venta de los últimos modelos del año a 9000 dólares por vehículo. ¿Cuántos modelos 2004 se deben pedir en agosto?

2 Un vendedor de periódicos debe determinar todos los días cuántos *New York Herald Wonderfuls* pedir. Paga 15 centavos por cada periódico y lo vende en 30 centavos. Cualquier periódico sobrante es una pérdida total. Según la experiencia anterior, el vendedor cree que la cantidad de periódicos que puede vender a diario se rige por la distribución de probabilidad de la tabla 5. ¿Cuántos periódicos debe pedir cada día?

3 Si c_u es fija, ¿un incremento en c_o aumentará o disminuirá la cantidad óptima pedida?

TABLA 4

No. de automóviles pedidos	Probabilidad
20	.30
25	.15
30	.15
35	.20
40	.20

TABLA 5

No. de automóviles pedidos	Probabilidad
50	.30
70	.15
90	.25
110	.10
130	.20

TABLA 6

No. de celdas	Probabilidad
50	.20
60	.15
70	.30
80	.10
90	.15
100	.10

TABLA 7

Cantidad necesaria	Probabilidad
200	.03
275	.03
350	.03
400	.05
450	.40
500	.30
550	.06
600	.07
650	.03

4 Si c_o es fija, ¿un incremento en c_u aumentará o disminuirá la cantidad óptima pedida?

5 La energía en la estación polar Lion se obtiene mediante celdas solares. Una vez al año llega un avión que vende celdas solares a la estación a un precio de 20 dólares cada celda. Debido a la incertidumbre respecto a las necesidades futuras de energía, la estación polar sólo puede adivinar la cantidad de celdas que requerirá durante el año próximo (véase distribución de probabilidad de la tabla 6). Si la estación polar se queda sin celdas solares, debe hacer un pedido especial a un costo de 30 dólares por celda.

a Si se supone que el problema del vendedor de periódicos es pertinente, ¿cuántas celdas se deben pedir al avión?

b En el inciso (a), ¿qué tipo de costo se ignora?

6 La demanda diaria de maestros auxiliares en el sistema escolarizado de Los Ángeles se apega a la distribución de la tabla 7. Los Ángeles quiere saber cuántos maestros tiene en reserva, si el maestro es necesario o no cuesta 30 dólares por día conservar a un maestro sustituto en reserva. Si no hay suficientes maestros un día determinado, los maestros regulares atienden la clase a un costo de 54 dólares por maestro regular. ¿Cuántos maestros debe tener en reserva Los Ángeles?†

Grupo B

7 Blockbuster Publishers revisa cada cuatro años sus libros de texto. Ya hace tres años que se revisó el libro mejor vendido, *The Joy of OR*. En la actualidad, hay en existencia 2 000 ejemplares del libro, por lo que Blockbuster tiene que determinar cuántos ejemplares de la obra se deberán imprimir para el próximo año. El departamento de ventas opina que las ventas del año próximo se regirán por la distribución

†Basado en Bruno (1970).

TABLA 8

Ejemplares pedidos	Probabilidad
5000	.30
6000	.20
7000	.40
8000	.10

TABLA 9

Semana	Probabilidad
36	.05
37	.15
39	.20
40	.30
41	.15
42	.10
43	.05

de la tabla 8. Cada ejemplar de *Joy* vendido durante el año próximo genera 35 centavos de ingresos al editor. Los ejemplares que no se vendan al final del año próximo ya no se pueden vender a su precio original, sino que se venden a 5 dólares a las librerías de Bonds Ennoble y Gitano. El costo de impresión del libro es 50 000 dólares más 15 dólares por libro impreso. ¿Cuántos ejemplares de *Joy* se deben imprimir? ¿Cambiaría la respuesta si hubiera 4000 ejemplares en existencia ahora?

8 Vivian y Wayne planean asistir a las clases de parto natural Lamaze. Las clases Lamaze son una vez a la semana durante cinco semanas. En cada clase se proporciona 20% del conocimiento necesario para el parto "natural". Si Vivian y Wayne terminan sus clases antes del nacimiento de su hijo, olvidarán cada semana 5% de lo que habían aprendido en clase. Para maximizar su conocimiento esperado en el momento del nacimiento, ¿durante qué semana del embarazo deben empezar sus clases? Suponga que el número de semanas desde la concepción hasta el nacimiento se apega a la distribución de probabilidad de la tabla 9.

9‡ Algunas universidades permiten que un empleado ponga una cantidad q en una cuenta al principio de cada año, para que se use en los gastos del cuidado de los niños. La cantidad q no está sujeta al impuesto federal sobre la renta. Suponga que el gobierno federal grava todos los otros ingresos a una tasa de 40%. Si los gastos para la atención de los niños durante al año (llámeseles d) son menores que q, el empleado pierde, en efecto, $q - d$ dólares en el ingreso antes de impuestos. Si los gastos exceden q, el empleado debe pagar el excedente de su propio bolsillo, pero podría acreditar 25% de ello como un ahorro en su impuesto estatal sobre la renta.

Suponga que el profesor Muffy Rabbit opina que hay una oportunidad igual de que sus gastos por cuidado de los niños para el año próximo serán de 3000, 4000, 5000, 6000 o 7000 dólares. Al principio del año, ¿cuánto dinero tiene que ser depositado en la cuenta para el cuidado de los niños?

‡Basado en Rosenfeld (1986).

16.4 Problema del vendedor de periódicos: demanda continua

Ahora considere el escenario del vendedor de periódicos de la sección 16.3 en donde la demanda **D** es una variable aleatoria continua cuya función de densidad es $f(d)$. Si modificamos el razonamiento del análisis marginal de la sección 16.3 (o si utilizamos la regla de Leibniz para diferenciar una integral —véase problema 7 al final de esta sección), es posible demostrar que el costo esperado de quien toma las decisiones se minimiza al ordenar q^* unidades, donde q^* es la cantidad más pequeña que satisface

$$P(\mathbf{D} \leq q^*) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{4}$$

Como la demanda es una variable aleatoria continua, podemos encontrar un número q^* para el cual (4) se cumple en cuanto a la igualdad. Por lo tanto, la cantidad pedida óptima, en este caso, se puede determinar al encontrar el valor de q^* que satisface

$$P(\mathbf{D} \leq q^*) = \frac{c_u}{c_o + c_u} \qquad \text{o} \qquad P(\mathbf{D} \geq q^*) = \frac{c_o}{c_o + c_u} \tag{5}$$

Según (5), lo óptimo es ordenar unidades hasta el punto donde la última unidad pedida tiene una probabilidad

$$\frac{c_o}{c_o + c_u}$$

de ser vendida. El uso de (5) se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Reservación de habitaciones para ABA

La American Bar Association (ABA) está realizando su convención anual en Las Vegas. Seis meses antes de que la convención empiece, ABA tiene que decidir cuántas habitaciones reservar en el hotel donde se efectúa la convención. En este momento puede reservar habitaciones a un costo de 50 dólares por cuarto, pero seis meses antes de la convención, ABA tiene la incertidumbre de cuántas personas asistirán a la convención. ABA cree, no obstante, que la cantidad de habitaciones requerida está normalmente distribuida, que su media es de 5000 cuartos y tiene una desviación estándar de 2000 habitaciones. Si la cantidad de habitaciones requerida excede las habitaciones reservadas en el hotel donde se efectuará la convención, se tienen que encontrar habitaciones extra en los hoteles vecinos a un costo de 80 dólares por habitación. Para los participantes representa un inconveniente estar en un hotel vecino. Esta inconveniencia se mide al valorar un costo adicional de 10 dólares por cada habitación que se encuentre en un hotel vecino. Si el objetivo es minimizar el costo esperado para ABA y sus miembros, ¿cuántos cuartos debe reservar ABA en el hotel donde se efectúa la convención?

Solución Definamos

q = cantidad de habitaciones reservadas
d = cantidad de habitaciones que se requieren realmente

Si $d \leq q$, entonces el único costo que se genera es el costo de las habitaciones reservadas con anticipación, de modo que si $d \leq q$, el costo total es $50q$. Por lo tanto, $c_o = 50$. Si $d \geq q + 1$, se incurre en los costos siguientes:

Costo por reservar q habitaciones $= 50q$
Costo por rentar $d - q$ habitaciones en los hoteles vecinos $= 80(d - q)$
Costo por la inconveniencia en los participantes inesperados $= 10(d - q)$
Costo total $= 90d - 40q$ y $c_u = 40$

Como $\frac{c_u}{c_u + c_o} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$, vemos que, según (5), la cantidad óptima de habitaciones que se deben reservar es el número q^* que satisface

$$P(\mathbf{D} \leq q^*) = \frac{4}{9} \tag{6}$$

La función de Excel, NORMINV, se usa para calcular q^*. Como

=NORMINV(4/9 5000 2000)

es igual a 4720.58, ABA debe reservar 4720 o 4721 habitaciones.

EJEMPLO 3 Sobreboletaje en aerolíneas

El precio de un vuelo Nueva York-Indianápolis es de 200 dólares. Cada avión puede transportar hasta 100 pasajeros. Por lo común, algunos de los pasajeros que han comprado boletos para un vuelo no se presentan. Como una forma de protección contra este tipo de pasajeros, la aerolínea tratará de vender más de 100 boletos por cada vuelo. Las leyes federales establecen que cualquier cliente con boleto que no aborda el avión tiene derecho a una compensación (podrían ser 100 dólares). Según la información pasada, la cantidad de pasajeros que no aborda el vuelo Nueva York-Indianápolis sigue una distribución normal, con una media de 20 y una desviación estándar de 5. Para maximizar los ingresos esperados menos los costos de compensación, ¿cuántos boletos debe vender la aerolínea por cada vuelo? Suponga que cualquiera que no usa el boleto recibe una devolución 200 dólares.

Solución Sean

q = cantidad de boletos que vende la aerolínea
d = cantidad de pasajeros que no se presenta

Observe que $q - d$ será la cantidad de clientes que en realidad abordan el avión. Si $q - d \leq 100$, entonces todos los clientes que se presentan abordarán el avión, por lo que el costo de la aerolínea es $-200(q - d) = 200d - 200q$. Si $q - d \geq 100$, entonces 100 pasajeros abordarán el avión (la aerolínea paga 200(100) = 20 000 dólares), y $q - d - 100$ clientes serán rechazados. Estos $q - d - 100$ clientes recibirán compensación de $100(q - d - 100)$. Por lo tanto, si $q - d \geq 100$, el costo total para la aerolínea se obtiene con $100(q - d - 100) - 200(100) = 100(q - 100) - 100d - 20\,000$. En resumen, el costo neto de la aerolínea se podría expresar como se muestra en la tabla 10.

Si $q - 100$ se considera una variable de decisión, entonces tenemos un problema del vendedor de periódicos con $-c_u = -200$ (o $c_u = 200$) y $c_o = 100$. De acuerdo con (5), debemos elegir $q - 100$ para que satisfaga

$$P(\mathbf{D} \leq q - 100) = \frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{2}{3} \tag{7}$$

El problema se puede resolver con ayuda de Excel. Como

=DIST.NORM.INV(2/3,120,5)

da 122.15, podríamos concluir que la aerolínea debe intentar vender 122 o 123 boletos. Esto quiere decir que una vez que las ventas de boletos alcanzan 122 (o 123), ya no se

TABLA 10
Cálculo del costo total

	Costo total
$q - d \geq 100$ (o $d \leq q - 100$)	$100\,(q - 100) - 100d - 20\,000$
$q - d \leq 100$ (o $d \geq q - 100$)	$200d - 200\,(q - 100) - 200\,(100)$

deben vender más boletos para el vuelo. Naturalmente, si menos de 122 personas quieren comprar boletos, la aerolínea no debe rehusarse a vender un boleto más para el vuelo.

PROBLEMAS

Grupo A

1 **a** Refiérase al ejemplo 3. ¿Por qué es irreal suponer que la distribución de la cantidad de pasajeros que no se presentan es independiente de q?

b Si la cantidad de pasajeros que no se presenta tuviera una distribución normal, con una media de $.05q$ y una desviación estándar de $.05q$, ¿todavía sería un problema como el del vendedor de periódicos?

2 Condo Construction Company va a pedir un préstamo al First National Bank. En el momento presente, el banco está dispuesto a prestar a Condo hasta 1 millón de dólares con costos de intereses de 10%. Condo opina que la cantidad de fondos prestados necesarios durante el año actual tiene una distribución normal, con una media de 700 000 dólares y una desviación estándar de 300 000 dólares. Si Condo requiere otro préstamo durante el año, tendrá que ir con Louie, el prestamista. El costo por dólar prestado por Louie es de 25 centavos. Si Condo desea minimizar los costos del interés esperado para el año, ¿cuánto dinero debe pedir prestado al banco?

3 Joe vende árboles de navidad para pagar la inscripción a la universidad. Compra árboles a 10 dólares cada uno, y los vende a 25 dólares. La cantidad de árboles que puede vender sigue una distribución normal con una media de 100 y una desviación estándar de 30. ¿Cuántos árboles debe comprar Joe?

4 Un vendedor en Wrigley Field da los perritos calientes a 1.50 dólares cada uno. Él los compra a 1.20 dólares. Todos los perritos calientes que no se venden en Wrigley Field por la tarde, se pueden vender por la noche en Comiskey Park a sólo 1 dólar. La demanda diaria de perritos calientes en Wrigley Field tiene una distribución normal con una media de 40 y una desviación estándar de 10.

a Si el vendedor compra perritos calientes una vez al día, ¿cuántos debe comprar?

b Si compra 52 perritos calientes, ¿cuál es la probabilidad de que el vendedor cumpla con toda la demanda del día de perritos calientes en Wrigley Field?

Grupo B

5[†] Motorama TV estima que la demanda anual de sus televisores está (y estará en el futuro) normalmente distribuida, con una media de 6000 y desviación estándar de 2000. Motorama tiene que determinar cuánta capacidad de producción debe tener. El costo de conformar suficiente capacidad de producción para fabricar 1000 aparatos por año es 1 000 000 de dólares (equivalente en términos de valor presente a un costo de 100 000 dólares por año por siempre). Si se excluye el costo de conformación de la capacidad, cada aparato vendido contribuye con 250 dólares a las ganancias. ¿Cuánta capacidad de producción debe tener Motorama?

6 I. L.Pea es una compañía reconocida que surte pedidos por correo. Durante el ajetreo de fin de año (del primero de noviembre al 15 de diciembre), la cantidad de pedidos que I. L.Pea debe surtir cada día (cinco días a la semana) está normalmente distribuida, con una media de 2000 y desviación estándar de 500. I. L.Pea debe determinar cuántos empleados tienen que trabajar durante esa temporada. Cada empleado trabaja cinco días a la semana, ocho horas diarias, puede procesar 50 pedidos por día y recibe como pago 10 dólares por hora. Si la mano de obra de tiempo completo no puede manejar los pedidos del día durante el horario regular, algunos empleados tendrán que trabajar tiempo extra. Cada empleado recibe entonces 15 dólares por hora por el tiempo extra. Por ejemplo, si se reciben 300 pedidos en un día y hay cuatro empleados, entonces $300 - 4(50) = 100$ pedidos tienen que ser procesados por empleados que trabajan tiempo extra. Como cada empleado es capaz de llenar $\frac{50}{8} = 6.25$ pedidos por hora, I. L.Pea necesitaría pagar a los trabajadores $\frac{100}{6.25} = 16$ horas de tiempo extra por ese día. Para minimizar sus costos esperados de mano de obra, ¿cuántos empleados de tiempo completo debería tener I. L.Pea durante la ventas de la temporada de fin de año?

7 Suponga que la demanda es una variable aleatoria continua que tiene una función de densidad de probabilidad $f(d)$, $c(d, q)$ se obtiene con la ecuación (2). Demuestre que si q unidades se piden, el costo esperado $E(q)$ se podría expresar como

$$E(q) = \int_0^q c_o q f(t)dt + \int_q^\infty (-c_u) q f(t)dt$$
$$+ \text{(términos sin } q \text{ en el integrando)}$$

Ahora aplique la regla de Leibniz para deducir la ecuación (5).

[†]Basado en Virts y Garrett (1970).

16.5 Otros modelos de periodo único

Muchos modelos de periodo único, muy interesantes, son inmanejables en investigación de operaciones con el análisis marginal. En estos casos, expresamos la función objetivo del analista (por lo regular, ganancia esperada o costo esperado) como una función $f(q)$

de la variable de decisión q. Luego determinamos un máximo o un mínimo de $f(q)$ al hacer $f'(q) = 0$. En esta sección ilustramos esta idea mediante un breve análisis de un modelo de licitación.

EJEMPLO 4 Constructora Condo

Esta compañía participa en la licitación de una obra importante. La obra costará de principio a fin 2 millones de dólares. Otra compañía también presenta una licitación. Condo opina que es igualmente probable que la licitación de la otra constructora sea de cualquier cantidad entre 2 y 4 millones. Si Condo desea maximizar la ganancia esperada, ¿de cuánto debe ser la licitación?

Solución Sea

$\mathbf{B}$ = variable aleatoria que representa la oferta del contrincante de Condo

b = oferta actual del contrincante de Condo

Entonces $f(q)$, la función de densidad para $\mathbf{B}$, está dada por

$$f(b) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,000\,000} & (2\,000\,000 \leq b \leq 4\,000\,000) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea q = oferta de Condo. Si $b > q$, Condo ofrece más que el contrincante y obtiene una utilidad de $q - 2\,000\,000$. Si $b < q$, la otra constructora ofrece más que Condo, y ésta no gana nada. El evento $b = q$ tiene una probabilidad de cero de que ocurra y se podría ignorar. Sea $E(q)$ la ganancia esperada de Condo si ésta ofrece q. Entonces,

$$E(q) = \int_{2\,000\,000}^{q} (0)f(b)db + \int_{q}^{4\,000\,000} (q - 2\,000\,000)f(b)db$$

Como $f(b) = \frac{1}{2\,000\,000}$ para $2\,000\,000 \leq b \leq 4\,000\,000$, se obtiene

$$E(q) = \frac{(q - 2\,000\,000)(4\,000\,000 - q)}{2\,000\,000}$$

Con el objeto de encontrar el valor de q que maximiza $E(q)$, se calcula

$$E'(q) = \frac{-(q - 2\,000\,000) + (4\,000\,000 - q)}{2\,000\,000} = \frac{6\,000\,000 - 2q}{2\,000\,000}$$

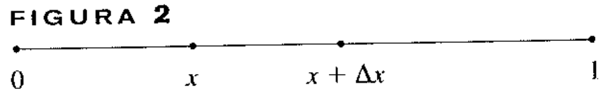
Por lo tanto, $E'(q) = 0$ para $q = 3\,000\,000$. Puesto que $E''(q) = \frac{-2}{2\,000\,000} < 0$, entonces se sabe que $E(q)$ es una función cóncava de q, y $q = 3\,000\,000$ en realidad sí maximiza a $E(q)$. Por lo tanto, Condo debe proponer 3 000 000. La ganancia esperada de Condo será $E(3\,000\,000) = 500\,000$ dólares.

PROBLEMAS

Grupo A

1 La ciudad de Rulertown consta del intervalo unitario [0, 1] (véase figura 2]. Rulertown necesita determinar dónde ubicar su única estación de bomberos. Se sabe que para un Δx pequeño, la probabilidad de que ocurra un incendio en un lugar entre x y $x + \Delta x$ es $2x(\Delta x)$. Rulertown desea minimizar la distancia promedio entre la estación de bomberos y el incendio. ¿Dónde se debe construir la estación de bomberos?

FIGURA 2



Grupo B

2 Suponga que la Oficina de la Reserva Federal es capaz de controlar la tasa de crecimiento del aprovisionamiento de dinero estadounidense. Suponga, asimismo, que durante un año en que el aprovisionamiento de dinero creció $x\%$, el Producto Nacional Bruto (PIB) creció $\mathbf{Z}x\%$, donde $\mathbf{Z}$ es una variable aleatoria conocida. El gobierno ha decidido que el PIB crezca $k\%$ cada año. (Una tasa de crecimiento muy alta ocasiona una inflación excesiva, y una demasiado baja origina desempleo.) Para modelar la opinión del gobierno, éste evalúa un costo de $(d - k)^2$ durante un año en el cual el PIB crece $d\%$.

a Determine la tasa de crecimiento del aprovisionamiento de dinero que debe establecer la Oficina de la Reserva Federal si el objetivo es minimizar el costo esperado del gobierno.

b Demuestre que para un valor dado de $E(\mathbf{Z})$, un incremento en var $\mathbf{Z}$ disminuirá la tasa de crecimiento óptima del aprovisionamiento de dinero determinado en el inciso (a). (*Sugerencia:* aplique el hecho de que var $\mathbf{Z} = E(\mathbf{Z}^2) - E(\mathbf{Z})^2$.)

16.6 La EOQ con demanda incierta: modelos (r, q) y (s, S)

En esta sección se estudia una modificación de la EOQ que se usa cuando el plazo de entrega (o también demora en la entrega o tiempo de espera) no es cero y la demanda durante cada plazo de entrega es aleatoria. Se empieza por suponer que toda la demanda puede ser acumulada. Al igual que en el capítulo 15, se supone un modelo de revisión continuo, de tal modo que los pedidos se pueden hacer en cualquier momento, y se define

K = costo por hacer los pedidos
h = costo por almacenamiento/unidad/año
L = plazo de entrega de cada pedido (se supone que se conoce con certeza)
q = cantidad ordenada cada vez que se hace un pedido

Se requieren también las definiciones siguientes:

$\mathbf{D}$ = variable aleatoria (se supone que es continua) que representa la demanda anual, con media $E(\mathbf{D})$, varianza var $\mathbf{D}$ y desviación estándar $\sigma_{\mathbf{D}}$
c_B = costo generado por cada unidad faltante, el cual no depende de cuánto tome agotar las existencias
$OHI(t)$ = inventario disponible (existencias) en el tiempo t

De acuerdo con la figura 3, se puede ver que $OHI(1) = 100$, $OHI(0) = 200$ y $OHI(6) = OHI(7) = 0$.

$B(t)$ = cantidad de pedidos pendientes en el tiempo t
$I(t)$ = nivel neto de existencias en el tiempo $t = OHI(t) - B(t)$
r = nivel de existencias en el cual se hace el pedido (punto de reabastecimiento)

En la figura 3, $B(t) = 0$ para $0 \le t \le 6$ y $B(7) = 100$. $I(t)$ concuerda con el concepto de inventario usado en el capítulo 15; $I(0) = 200 - 0 = 200$, $I(3) = 260 - 0 = 260$ y $I(7) =$

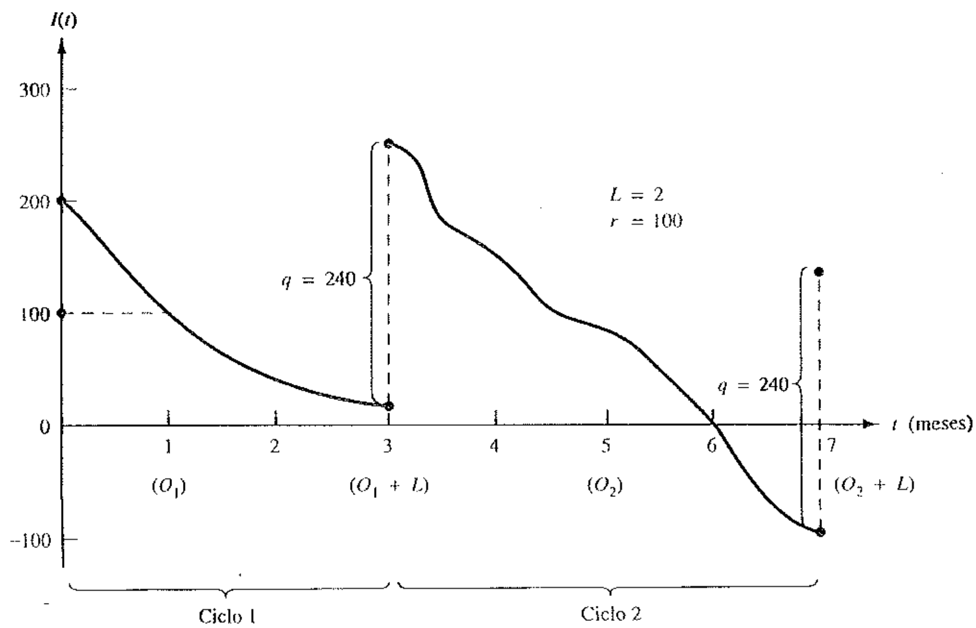


FIGURA 3
Evolución respecto al tiempo del inventario en el modelo del punto de reabastecimiento

$0 - 100 = -100$. El punto de reabastecimiento $r = 100$; siempre que el nivel de existencias llega a r, se hace un pedido de q unidades.

$\mathbf{X}$ = variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de la entrega

Suponemos que $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria continua que tiene función de densidad $f(x)$ y media, varianza y desviación estándar de $E(\mathbf{X})$, var $\mathbf{X}$ y σ_x, respectivamente. Si suponemos, además, que las demandas en puntos distintos en el tiempo son independientes, entonces, se puede demostrar que la demanda aleatoria en el plazo de entrega, $\mathbf{X}$, satisface

$$E(\mathbf{X}) = LE(\mathbf{D}), \qquad \text{var } \mathbf{X} = L(\text{var } \mathbf{D}), \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \sigma_{\mathbf{D}}\sqrt{L} \tag{8}$$

Suponemos que si $\mathbf{D}$ está normalmente distribuida, entonces $\mathbf{X}$ también seguirá una distribución normal.

Suponga que la demora en la entrega L es una variable aleatoria (que se denota con $\mathbf{L}$), con media $E(\mathbf{L})$, varianza var $\mathbf{L}$ y desviación estándar $\sigma_{\mathbf{L}}$. Si el plazo para la entrega es independiente de la demanda por unidad de tiempo durante el plazo de entrega, entonces

$$E(\mathbf{X}) = E(\mathbf{L})E(\mathbf{D}) \qquad \text{y} \qquad \text{var } \mathbf{X} = E(\mathbf{L})(\text{var } \mathbf{D}) + E(\mathbf{D})^2(\text{var } \mathbf{L}) \tag{8'}$$

Queremos elegir q y r de tal manera que minimicen el costo total anual esperado (exclusivo de costo de compra). Antes de mostrar cómo encontrar los valores óptimos de r y q, examinemos una explicación de cómo el inventario evoluciona con el tiempo. Suponga que un pedido de $q = 240$ unidades llega justo en el tiempo 0. También supongamos que $L = 2$. En la figura 3, los pedidos de tamaño q se hacen en los tiempos $O_1 = 1$ y $O_2 = 5$. Estos pedidos se reciben en los tiempos $O_1 + L = 3$ y $O_2 + L = 7$, respectivamente. Un **ciclo** se define como el tiempo entre dos instantes cualesquiera en los cuales se recibe un pedido. La figura 3 tiene dos ciclos completos: el ciclo 1, desde la llegada del pedido en el tiempo 0 hasta el instante antes de que el pedido llegue en el tiempo $O_1 + L = 3$; y el ciclo 2, desde la llegada del pedido en el tiempo $O_1 + L = 3$ hasta el instante antes de que el pedido llegue en el tiempo $O_2 + L = 7$.

Durante el ciclo 1, la demanda durante el plazo de entrega es menor que r, de modo que no hay déficit. Durante el ciclo 2, la demanda durante el plazo de entrega excede r, así que se agotan las existencias entre el tiempo 6 y el tiempo $O_2 + L = 7$. Debe quedar claro que al incrementar r podemos reducir el agotamiento de existencias. Infortunadamente, al incrementar r nos obligamos a llevar más inventario, y, por lo tanto, sube el costo por tener almacenados los bienes. Por consiguiente, un valor óptimo de r tiene que representar algún tipo de transacción entre los costos por almacenar los productos y los costos generados al agotarse las existencias.

A continuación mostraremos cómo se pueden definir los valores de q y r.

Determinación del punto de reabastecimiento: el caso de pedidos pendientes

La situación en la cual toda la demanda debe cumplirse a la larga y no perder venta alguna se llama el **caso de pedidos pendientes**, para la cual mostraremos cómo determinar el punto de reabastecimiento y pedir la cantidad que minimice el costo anual esperado.

Supongamos que cada unidad se compra al mismo precio; por lo tanto, los costos de compra son fijos. Definamos $TC(q, r)$ = costo anual esperado (sin incluir costo de compra) que se genera si cada pedido es por q unidades y se hace cuando el punto de reabastecimiento es r. Entonces, $TC(q, r)$ = (costo anual esperado por conservar los bienes) + (costo anual esperado por hacer el pedido) + (costo anual esperado debido a la falta de producto). Con el objeto de determinar el punto de reabastecimiento óptimo y cantidad del pedido, supongamos que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en relación con el nivel promedio de existencias disponibles. Esta suposición es razonable en la mayoría de los casos porque la falta de existencias (si se presentan) por lo regular ocurren durante sólo una pequeña parte del ciclo. (Véase problema 5 al final de esta sección.) Entonces, $I(t) = OHI(t) - B(t)$ genera

$$\text{Valor esperado de } I(t) \cong \text{valor esperado de } OHI(t) \tag{9}$$

Ahora ya podemos aproximar el costo por conservar los bienes que se espera en el año. Sabemos que costo por conservar los bienes anual esperado = h (valor esperado del nivel de existencias disponible). Entonces, de acuerdo con (9), podemos obtener un valor aproximado del costo por conservar los bienes esperado al año mediante h(valor esperado de $I(t)$). Al igual que en el capítulo 3, el valor esperado de $I(t)$ será igual al valor esperado de $I(t)$ durante un ciclo. Como la tasa media a la cual se presenta la demanda es constante, escribimos

$$\begin{aligned} &\text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante un ciclo} \\ &\quad = \tfrac{1}{2}[(\text{valor esperado de } I(t) \text{ al principio del ciclo}) \\ &\qquad + (\text{valor esperado de } I(t) \text{ al final del ciclo})] \end{aligned} \tag{10}$$

Al final del ciclo (un instante antes de que llegue un pedido), el nivel de existencias será igual al nivel de existencias en el punto de reabastecimiento (r) menos la demanda **X** durante el plazo en la entrega. Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$ al final del ciclo $= r - E(\mathbf{X})$.

Al principio de un ciclo, el nivel de existencias al final del ciclo aumenta con la llegada de un pedido de tamaño q. Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$ al principio del ciclo es igual a $= r - E(\mathbf{X}) + q$. Ahora, con (10) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante el ciclo} &= \tfrac{1}{2}(r - E(\mathbf{X}) + r - E(\mathbf{X}) + q) \\ &= \frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo anual esperado por almacenar los productos $\cong h(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X}))$.

Para determinar el costo anual esperado debido al agotamiento de las existencias o los pedidos pendientes, debemos definir

$\mathbf{B}_r$ = variable aleatoria que representa el agotamiento de existencias o pedidos pendientes durante un ciclo si el punto de reabastecimiento es r

Ahora,

$$\text{Costo del déficit anual esperado} = \left(\frac{\text{costo esperado del déficit}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos esperados}}{\text{año}}\right)$$

Con la definición de $\mathbf{B}_r$,

$$\frac{\text{Costo esperado del déficit}}{\text{Ciclo}} = c_B E(\mathbf{B}_r)$$

Como la demanda se cumplirá a la larga, un promedio de $\frac{E(\mathbf{D})}{q}$ pedidos se hará cada año. Entonces,

$$\frac{\text{costo esperado del déficit}}{\text{Año}} = \frac{c_B E(\mathbf{B}_r) E(\mathbf{D})}{q}$$

Por último,

$$\text{Costo anual esperado por hacer los pedidos} = K\left(\frac{\text{pedidos esperados}}{\text{año}}\right) = \frac{KE(\mathbf{D})}{q}$$

Luego de reunir el costo anual esperado por conservar los bienes, el costo por déficit y el costo por hacer pedidos, obtenemos

$$TC(q, r) = h\left(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X})\right) + \frac{c_B E(\mathbf{B}_r) E(\mathbf{D})}{q} + \frac{KE(\mathbf{D})}{q} \tag{11}$$

Por medio del método descrito en la sección 11.5, podríamos hallar el valor de q y r que minimice (11) determinando q^* y r^* de q y r que satisface

$$\frac{\partial TC(q^*, r^*)}{\partial q} = \frac{\partial TC(q^*, r^*)}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

En el problema de repaso 7 se ilustra el uso de LINGO para determinar los valores de q

y r que satisface con toda exactitud (12). En la mayor parte de los casos, el valor de q^* que satisface (12) está muy cercano al EOQ[†] de $(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h})^{1/2}$. Por esta razón suponemos que la cantidad de pedidos óptima q^* podría determinarse aproximadamente con EOQ. A continuación se indica cómo usar el análisis marginal para determinar un punto de reabastecimiento r^* que minimice $TC(q, r)$ dado un valor q para la cantidad de pedidos.

Si suponemos un valor dado de q, el costo anual esperado por hacer los pedidos es independiente de r. Por lo tanto, nos podríamos concentrar en minimizar la suma del costo anual esperado por almacenar los bienes y el costo por déficit al determinar un valor r que minimice $TC(q, r)$. De acuerdo con el método del análisis marginal de las secciones 16.2 y 16.3, suponga que incrementamos el punto de reabastecimiento (para Δ pequeño) desde r hasta $r + \Delta$ (con q fija). ¿Habrá un incremento o un decremento en $TC(q, r)$?

Si aumentamos r a $r + \Delta$, el costo anual esperado por almacenar los bienes se incrementará

$$h\left(\frac{q}{2} + r + \Delta - E(\mathbf{X})\right) - h\left(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X})\right) = h\Delta$$

Si incrementamos el punto de reabastecimiento de r a $r + \Delta$, se reducirán los costos esperados anuales por el agotamiento de las existencias. Esto se debe al hecho de que durante cualquier ciclo en el cual la demanda en el plazo para la entrega es por lo menos r, la cantidad de *stock* agotado durante el ciclo se reducirá en Δ unidades. En otras palabras, cuando el punto de reabastecimiento pasa de r a $r + \Delta$ los costos del agotamiento de las existencias se reducirán $c_B\Delta$ durante una fracción $P(\mathbf{X} \geq r)$ de todos los ciclos. Como hay un promedio de $\frac{E(\mathbf{D})}{q}$ ciclos al año, al incrementar el punto de reabastecimiento desde r hasta $r + \Delta$ se reducirá el costo anual esperado del agotamiento de existencias en

$$\frac{\Delta E(\mathbf{D})c_B P(\mathbf{X} \geq r)}{q}$$

Observe que a medida que r aumenta, $P(\mathbf{X} \geq r)$ disminuye, de modo que cuando r se incrementa baja la reducción esperada en el costo por el déficit anual esperado que resulta de dar un incremento Δ al punto de reabastecimiento. Esta observación permite trazar la figura 4.

Sea r^* el valor de r para el cual el beneficio marginal es igual al costo marginal, es decir,

$$\frac{\Delta E(\mathbf{D})c_B P(\mathbf{X} \geq r^*)}{q} = h\Delta$$

$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq}{c_B E(\mathbf{D})}$$

Suponga que $r < r^*$. En la figura 4 se ilustra, entonces, que si aumentamos el punto de reabastecimiento de r a r^* ahorramos más en el costo por déficit de lo que perdemos en el costo por almacenar. Ahora supongamos que $r > r^*$. Entonces vemos en la figura 4 que al bajar el punto de reabastecimiento desde r hasta r^* podemos ahorrar más en el costo por almacenamiento de lo que perdemos en el costo incrementado por el déficit. Por lo tanto, r^* no alcanza la transacción óptima entre el costo por déficit y el costo por almacenar. En resumen, si suponemos que la cantidad pedida puede ser aproximada por

$$\text{EOQ} = \left(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h}\right)^{1/2}$$

entonces tenemos que el punto de reabastecimiento r^* y la cantidad del pedido q^* para el caso de pedidos pendientes

$$q^* = \left(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h}\right)^{1/2} \tag{13}$$

$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{c_B E(\mathbf{D})}$$

[†]Brown (1967) demostró que para aproximar el valor óptimo de q, la EOQ es por lo regular aceptable a menos que EOQ $\leq \sigma_x$.

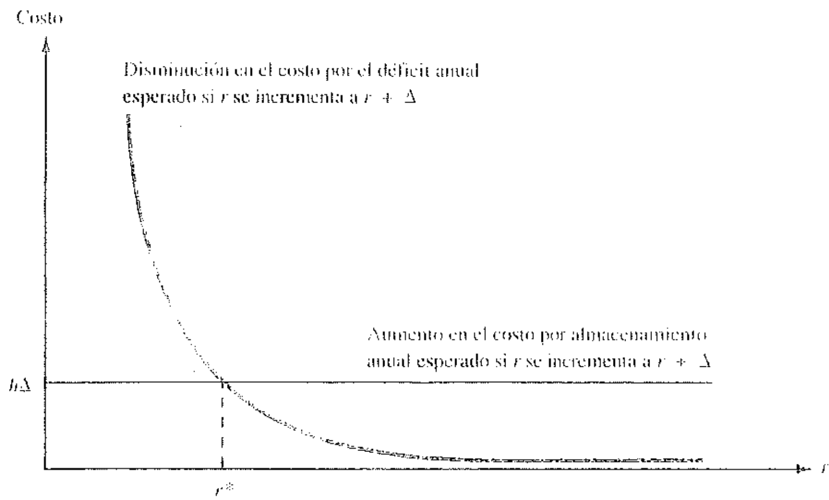


FIGURA 4
Transacción entre el costo por almacenamiento y costo por déficit

Si

$$\frac{hq^*}{c_B E(\mathbf{D})} > 1$$

entonces (13) no tendrá solución, y el costo por almacenamiento es muy alto en relación con el costo del agotamiento de las existencias. La administración debe establecer el punto de reabastecimiento en el nivel más bajo aceptable. Si (13) genera un valor negativo de r^*, la administración debe fijar también el punto de reabastecimiento en el nivel más bajo aceptable.

OBSERVACIONES

1 El valor $P(\mathrm{X} \geq r)$ es justo la probabilidad de que se agoten las existencias durante un plazo para la entrega. Asimismo, observe que para h cercana a cero, (13) proporciona una probabilidad del agotamiento de las existencias que es cercana a cero. Para c_B grande, (13) da también una probabilidad de agotamiento de las existencias cercana a cero. Ambos resultados deben ser compatibles con la intuición.

2 Después de sustituir la EOQ para q en (13), podría ser posible determinar con facilidad un valor aproximado óptimo para r, el punto de reabastecimiento. Observe que $r - E(\mathrm{X})$ es la cantidad en exceso de la demanda esperada en el plazo para la entrega que se pide para protegerse contra el agotamiento de las existencias durante el tiempo que se tarda en surtir un pedido. Por esta razón, $r - E(\mathrm{X})$ recibe a menudo el nombre de **existencias o stock de seguridad**.

3 Según (11), encontramos que el costo anual esperado de las existencias de seguridad almacenadas es $h(r - E(\mathrm{X})) = h$(nivel del stock de seguridad).

El ejemplo siguiente ilustra la estimación del punto de reabastecimiento y del nivel de las existencias de seguridad en el caso de la demanda con pedidos pendientes.

EJEMPLO 5 Existencias de discos

Una tienda de computadoras vende cada año un promedio de 1 000 cajas de discos. La demanda anual de cajas de discos sigue una distribución normal con desviación estándar de 40.8 cajas. La tienda pide los discos a un distribuidor regional. Cada pedido es surtido en dos semanas. El costo de hacer cada pedido es 50 dólares y el costo anual por conservar una caja de discos en el inventario, es de 10 dólares. Se supone que el costo del agotamiento de las existencias por unidad (debido a la pérdida de clientela y al costo de hacer un pedido especial) es de 20 dólares. La tienda está dispuesta a asumir que toda la demanda está acumulada. Determine la cantidad adecuada del pedido, punto de reabastecimiento y nivel de las existencias de seguridad para la tienda de computadoras. Suponga que la demanda anual está normalmente distribuida. ¿Cuál es la probabilidad de que se agoten las existencias durante el plazo de entrega?

Solución Empezamos por estimar la EOQ. Puesto que $h = 10$ dólares/caja/año, $K = 50$ dólares y $E(\mathbf{D}) = 1000$ obtenemos

$$\mathrm{EOQ} = \left(\frac{2(50)(1\,000)}{10}\right)^{1/2} = 100$$

Luego sustituimos $q^* = 100$ en (13) para determinar el punto de reabastecimiento. Para hacerlo, requerimos encontrar la distribución de probabilidad de **X**, la demanda en el plazo de entrega. Como $L = 2$ semanas, **X** estará normalmente distribuida con

$$E(\mathbf{X}) = \frac{E(\mathbf{D})}{26} = \frac{1\,000}{26} = 38.46 \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \frac{\sigma_{\mathbf{D}}}{\sqrt{26}} = \frac{40.8}{\sqrt{26}} = 8$$

Ya que $c_B = 20$ dólares, (13) ahora genera

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{10(100)}{20(1\,000)} = .05 \tag{14}$$

Usamos la función de Excel DISTR.NORM.INV. Como

=NORMINV(0.95,38.46,8)

da 51.62, tenemos que el nivel de las existencias de seguridad es $r - E(\mathbf{X}) = 51.62 - 38.46 = 13.16$.

Para ver cómo un plazo de entrega variable afectaría el punto de reabastecimiento y el nivel de las existencias de seguridad, suponga que el plazo de entrega tiene una media de dos semanas, pero tiene una desviación estándar de una semana ($\frac{1}{52}$ de año). Luego, con (8′) se obtiene

$$\sigma_{\mathbf{X}}^2 = (\tfrac{1}{26})(40.8)^2 + (1000)^2 (\tfrac{1}{52})^2 = 64.02 + 369.82 = 433.84$$
$$\sigma_{\mathbf{X}} = \sqrt{433.84} = 20.83$$

Encontraríamos que $r = 38.46 + 1.65(20.83) = 72.83$ y que las existencias de seguridad se mantienen en $1.65(20.83) = 34.37$, si supusiéramos que la demanda en el plazo de entrega está normalmente distribuida. Por lo tanto, la variabilidad del plazo de entrega ¡es más del doble del nivel de existencias de seguridad requerido!

Determinación del punto de reabastecimiento: el caso de las ventas perdidas

Enseguida se supone que el agotamiento de las existencias ocasiona pérdida de ventas y que se genera un costo de c_{LS} dólares por cada venta perdida. (Además de las penalizaciones por la pérdida de la clientela futura, c_{LS} debería incluir la pérdida de ganancias debido a la venta perdida.)

Al igual que en el caso de los pedidos pendientes o incumplidos, suponemos que se puede aproximar en forma apropiada la cantidad pedida óptima mediante la EOQ, e intentar usar el análisis marginal para determinar el punto de reabastecimiento óptimo r^* (véase problema 6 al final de esta sección). La cantidad pedida óptima q^* y el punto de reabastecimiento r^* para el caso de las ventas perdidas son

$$q^* = \left(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h}\right)^{1/2}$$
$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(\mathbf{D})} \tag{15}$$

La clave para deducir (15) es darse cuenta que el inventario esperado en el caso de las ventas perdidas = (inventario esperado en el caso de los pedidos incumplidos) + (cantidad esperada de déficit por ciclo). Esta ecuación se deduce porque en el caso de las ventas perdidas encontramos que, durante cada ciclo, un promedio de (déficit esperado por ciclo) pocos pedidos se surtirán del inventario, con lo cual se elevaría el nivel promedio del inventario por una cantidad igual a los déficit esperados por ciclo. Observe que el lado derecho de (15) es menor que el lado derecho de (13). Por lo tanto, la suposición de las ventas perdidas genera una probabilidad de agotamiento de las existencias menor (y un punto de reabastecimiento y nivel de existencias de seguridad más grandes que en la suposición de los pedidos pendientes.

Con el fin de ilustrar el uso de (15) continuamos el estudio del ejemplo 5. Suponga que cada caja de discos se vende en 50 dólares y a la tienda le cuesta 30 dólares. Si se supone que el costo del agotamiento de las existencias de 20 dólares mencionado en el ejemplo 5 representa la clientela perdida, obtenemos c_{LS} al sumar la ganancia perdida (50 − 30) dólares a la clientela perdida de 20 dólares. Por lo tanto, $c_{LS} = 20 + 20 = 40$. Recuerde que, según el ejemplo 5, $E(\mathbf{D}) = 1000$ cajas por año, $h = 10$ dólares/caja/año, EOQ = 100 cajas y $K = 50$ dólares. Ahora (15) da

$$P(X \geq r^*) = \frac{10(100)}{10(100) + 40(1000)} = .024$$

Se usa Excel para calcular r. Como con

=NORMINV(.976,38.46,8)

se obtiene 54.28, tenemos que $r = 54.28$. Por lo tanto, en el caso de las ventas perdidas, el nivel de existencias de seguridad es $54.28 - 38.46 = 15.82$.

Estrategias de revisión continua (*r*, *q*)

Una estrategia de revisión continua del inventario, en la cual se pide una cantidad q siempre que el nivel del inventario llegue a un nivel de reabastecimiento r, se llama a menudo **estrategia (*r*, *q*)**. Una estrategia (r, q) también se llama **estrategia de las dos urnas** porque se puede poner en marcha mediante dos recipientes para almacenar un producto. Por ejemplo, para poner en marcha una estrategia (30, 500), surtimos los pedidos de la urna 1 con la condición de que la urna 1 contenga algunos productos. Tan pronto como la urna 1 se vacíe, sabemos que se ha alcanzado el punto de reabastecimiento $r = 30$, y entonces hacemos un pedido de $q = 500$ unidades. Cuando el pedido llega, colocamos 30 unidades en la urna 2, y el resto de las 500 unidades pedidas las ponemos en la urna 1. Por lo tanto, cada vez que la urna 1 queda vacía, sabemos que ya se alcanzó el punto de reabastecimiento.

Estrategias de revisión continua (*s*, *S*)

En la deducción de la mejor estrategia (r, q), supusimos que un pedido se puede hacer exactamente en el punto cuando el nivel de inventario alcanza el punto de reabastecimiento r. Usamos este supuesto para calcular el nivel esperado del inventario en el principio y el final de un ciclo. Suponga que una demanda por más de una unidad puede llegar en un momento particular. Luego entonces, un pedido se podría activar cuando el nivel de inventario es menor que r, y entonces es incorrecto el cálculo del nivel esperado del inventario al final y al principio de un ciclo. Por ejemplo, suponga que $r = 30$ y el nivel de inventario actual es 35. Si llega un pedido de 10 unidades, se hará un pedido cuando el nivel del inventario es 25 (no $r = 30$), lo cual invalida los cálculos que llevaron a (11). A partir de este análisis se ve que es posible por lo que se refiere al nivel de inventario quedarse abajo del punto de reabastecimiento.

Observe que no ocurriría este problema si todas las demandas fueran de una unidad, porque entonces el nivel del inventario caería de (por decir algo) 32 a 31, y luego a 30, y cada pedido se haría cuando el nivel de inventario igualara el punto de reabastecimiento r. De acuerdo con este ejemplo, vemos que si las demandas de tamaño mayor que una unidad se presentan en un punto en el tiempo, entonces el modelo (r, q) no proporcionaría una estrategia que minimice el costo anual esperado.

Se ha demostrado que para tales situaciones una **estrategia (*s*, *S*)** es óptima. Para organizar una estrategia (s, S) se hace un pedido cada vez que el nivel de inventario es menor que o igual a s. El tamaño del pedido es suficiente para elevar el nivel del inventario a S (suponiendo que el plazo de entrega es cero). Por ejemplo, si estuviéramos poniendo en marcha una estrategia (5, 40) y el nivel del inventario bajara en forma súbita de 7 a 3, haríamos inmediatamente un pedido de $40 - 3 = 37$ unidades. Es difícil el cálculo exacto de la estrategia (s, S) óptima. Si ignoramos el problema de "quedarse por abajo", podríamos encontrar un valor aproximado de la estrategia (s, S) de la manera siguiente. Se hace $S - s$ igual a la cantidad del pedido económico q. Luego se iguala s con el punto de reabastecimiento r obtenido de (13) o (15). Por último, se obtiene $S = r + q$. Por lo tanto, por lo que se refiere al ejemplo 5 (con pedidos pendientes permitidos), se hace $s = 51.66$ y $S = 51.66 + 100 = 151.66$ y se usa una estrategia (51.66, 151.66) (suponiendo que fuera posible una demanda fraccionaria).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un hospital pide la sangre a un banco regional de sangre. Dicho hospital utiliza cada año un promedio de 1 040 pintas (1 pinta = 0.473 L) de sangre tipo O. Cada pedido hecho al banco de sangre genera un costo de 20 dólares. El tiempo que tarda en llegar cada pedido es de una semana. Mantener 1 pinta de sangre en el inventario por un año cuesta al hospital 20 dólares. El costo del agotamiento de existencias por pinta está estimado en 50 dólares. La demanda anual por sangre tipo O sigue una distribución normal, con desviación estándar de 43.26 pintas. Determine la cantidad de pedido óptima, punto de reabastecimiento y nivel de existencias de seguridad. Suponga que 52 semanas = 1 año y que toda la demanda está acumulada. Para usar los métodos de esta sección, ¿qué supuesto irreal se tiene que hacer? ¿Qué estrategia (s, S) se aplicaría en esta situación?

2 Furnco vende sillas secretariales. La demanda anual sigue una distribución normal, con una media de 1040 sillas y desviación estándar de 50.99 sillas. Furnco pide las sillas de su tienda principal. Cuesta 100 dólares hacer un pedido, y el tiempo que tarda en llegar es de dos semanas. Furnco estima que cada vez que se agotan las existencias hay pérdidas de 50 dólares en la futura clientela. Furnco paga 60 dólares por cada silla y la vende en 100 dólares. El costo anual por mantener una silla en inventario es de 30% de su costo de compra.

a Si se supone que la demanda se acumula, ¿cuál es el punto de reabastecimiento y el nivel de existencias de seguridad?

b En el supuesto de que todo el agotamiento de existencias origine ventas perdidas, determine el punto de reabastecimiento óptimo y el nivel de existencias de seguridad.

3 Contamos con la información siguiente acerca de un producto:

Costo del pedido = 50 dólares
Demanda anual = N(960, 3,072.49)
Costo anual por almacenamiento = 6 dólares/producto/ año
Costo del déficit = 50 dólares por unidad
Plazo de entrega = un mes
Precio de venta = 50 dólares por unidad
Costo del producto = 50 dólares por unidad

a Determine la cantidad del pedido y el punto de reabastecimiento en el supuesto de que todas las demandas quedan pendientes.

b Determine la cantidad de pedido y un punto de reabastecimiento con la suposición de las ventas perdidas.

4 La demanda en el plazo de entrega de trajes de baño se rige por la variable aleatoria discreta de la tabla 11. La compañía vende un promedio de 10 400 trajes al año. El costo de hacer un pedido de trajes de baño es de 30 dólares, y el costo de conservar un traje de baño en inventario durante un año es de 3 dólares. El costo del agotamiento de existencias es de 3 dólares por traje. Utilice el análisis marginal para determinar la cantidad de pedido óptima y el punto de reabastecimiento.

TABLA 11

Demanda en el plazo de entrega	Probabilidad
180	.30
190	.30
200	.15
210	.10
220	.15

5 Con referencia a la figura 3, suponga que la demanda ocurre a una tasa constante durante cada ciclo. Encuentre un valor aproximado del nivel promedio de inventario disponible entre $t = 0$ y $t = 7$. También dé una aproximación de la cantidad promedio de déficit. ¿Es válida aquí la suposición de que el nivel del déficit promedio es pequeño en relación con el nivel promedio del inventario disponible?

Grupo B

6 Aplique el análisis marginal en este problema con el objeto de determinar el punto de reabastecimiento para el caso de las ventas perdidas.

a Demuestre que el nivel del inventario promedio para el caso de las ventas perdidas se podría expresar como

$$\tfrac{1}{2}[(r - E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{B}_r)) + (r - E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{B}_r) + q)] = r - E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{B}_r) + \tfrac{q}{2}$$

b Aunque los pedidos esperados por año ya no son igual a $\frac{E(\mathbf{D})}{q}$ (¿por qué?), suponemos que el número esperado de ventas perdidas por año es relativamente bajo. Por lo tanto, se podría suponer todavía que los pedidos esperados por año son $= \frac{E(\mathbf{D})}{q}$. Ahora aplique el análisis marginal para deducir (15).

7 Suponga que se genera un costo de S dólares (independiente del tamaño del agotamiento de las existencias) cada vez que se agotan las existencias durante un ciclo. Si se supone que la demanda está acumulada, aplique el análisis marginal para determinar el punto de reabastecimiento.

8 Explique la proposición siguiente: los productos que se mueven más rápido requieren existencias de seguridad más grandes que los productos que se mueven con más lentitud. (*Sugerencia*: ¿un valor $\frac{q}{E(\mathbf{D})}$ grande significa que un producto se mueve con rapidez o con lentitud?

9 Suponga que la demanda anual de un producto está normalmente distribuida, con una media de 600 y una varianza de sólo 300. Suponga, asimismo, que el plazo de entrega de un pedido es siempre de un mes. Demuestre que (sin usar la ecuación (8)) que la demanda en el plazo de entrega tiene una media de 50, varianza de 25 y desviación estándar de 5. Además, suponga que las demandas durante periodos distintos de un mes son variables aleatorias distribuidas idénticamente e independientes.

16.7 La EOQ con demanda incierta: método del nivel de servicio para determinar el nivel de existencias de seguridad

Ya se estableció que es muy difícil, por lo regular, determinar con exactitud el costo de que falte una unidad. Por esta razón, los administradores deciden, a menudo, controlar los faltantes aproximándose a un nivel de servicio especificado. Dos medidas del nivel de servicio se tratan en esta sección.

Medida del nivel de servicio 1 SLM_1, la fracción esperada (por lo regular se expresa como porcentaje) de toda la demanda que se cumple a tiempo.

Medida del nivel de servicio 2 SLM_2, número esperado de ciclos al año durante los cuales se presenta un déficit.

Se supone, a lo largo de toda esta sección, que todos los faltantes se acumulan. Mediante el ejemplo siguiente se ilustra el significado de las dos medidas de nivel de servicio.

EJEMPLO 6 SLM_1 Y SLM_2

Suponga que para una situación de inventario dada, la demanda anual promedio es 1000 y la EOQ es 100. La demanda durante un plazo de entrega es aleatoria y se expresa mediante la distribución de probabilidad de la tabla 12. Determine SLM_1 y SLM_2 para el caso de un punto de reabastecimiento de 30 unidades.

Solución La demanda esperada durante un plazo de entrega es $\frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{5}(40) + \frac{1}{5}(50) + \frac{1}{5}(60) = 40$ unidades. Si el punto de reabastecimiento es de 30 unidades, entonces nos reabasteceremos durante cada ciclo en el momento en que el nivel del inventario llegue a 30 unidades. Si la demanda en el plazo de entrega durante un ciclo es de 20 o 30 unidades, no experimentaremos déficit alguno. Durante un ciclo en el cual la demanda en el plazo de entrega es 40, habrá un déficit de 10 unidades; si la demanda en el plazo de entrega es 50, habrá un déficit de 20 unidades; si la demanda en el plazo de entrega es 60, habrá un déficit de 30 unidades. Por lo tanto, la cantidad esperada de unidades faltantes por ciclo está dada por $\frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(10) + \frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) = 12$.

Puesto que EOQ = 100 y se debe cumplir a la larga con toda la demanda, el número promedio de pedidos hechos cada año será $\frac{E(D)}{q} = \frac{1000}{100} = 10$. Entonces, la cantidad promedio de faltantes que ocurre durante un año será igual a $10(12) = 120$ unidades. Por consiguiente, en promedio, la demanda de $1\,000 - 120 = 880$ unidades se cumple, cada año, a tiempo. En este caso, $SLM_1 = \frac{880}{1000} = 0.88$, es decir, 88%. Esto demuestra que aun cuando el punto de reabastecimiento es menor que la demanda media en el plazo de entrega, podría resultar una SLM_1 relativamente alta, porque el agotamiento de las existencias sólo se presenta durante el plazo de entrega, el cual es a menudo una pequeña parte de cada ciclo.

Ahora determinaremos SLM_2 para un punto de reabastecimiento de 30. Con este punto puede ocurrir un agotamiento de existencias durante cualquier ciclo en el cual la demanda en el plazo de entrega exceda 30 unidades. Por lo tanto, la probabilidad de que se agoten las existencias durante un ciclo es $= P(X = 40) + P(X = 50) + P(X = 60) = \frac{3}{5}$.

TABLA 12
Función de masa para la demanda en el plazo de entrega

Demanda en el plazo de entrega	Probabilidad
20	$\frac{1}{5}$
30	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{1}{5}$
50	$\frac{1}{5}$
60	$\frac{1}{5}$

Como hay un promedio de 10 ciclos por año, el número esperado de ciclos por año que dará por resultado déficit es $10\left(\frac{3}{5}\right) = 6$. Por lo tanto, un punto de reabastecimiento de 30 genera una $SLM_2 = 6$ agotamientos de existencias por año.

Determinación del punto de reabastecimiento y nivel de existencias de seguridad para SLM_1

Si tenemos un valor deseado de SLM_1, ¿cómo determinaremos un punto de reabastecimiento que proporcione el nivel de servicio deseado? Suponga que pedimos la EOQ (q) y usamos un punto de reabastecimiento r. Según la sección 16.6,

$$\frac{\text{Déficit esperados}}{\text{Ciclo}} = E(\mathbf{B}_r)$$

$$\frac{\text{Déficit esperados}}{\text{Año}} = \frac{E(\mathbf{B}_r)E(\mathbf{D})}{q}$$

Aquí, $E(\mathbf{D})$ es la demanda anual promedio. Sea SLM_1 el porcentaje de toda la demanda que se cumple a tiempo. Entonces, para valores dados de q (para la cantidad pedida q) y r (para el punto de reabastecimiento) tenemos

$$1 - SLM_1 = \frac{\text{déficit esperado por año}}{\text{demanda esperada por año}} = \frac{E(\mathbf{B}_r)E(\mathbf{D})/q}{E(\mathbf{D})} = \frac{E(\mathbf{B}_r)}{q} \tag{16}$$

Mediante la ecuación (16) se puede determinar el punto de reabastecimiento que genera un nivel de servicio deseado. Ahora suponemos que la demanda en el plazo de entrega sigue una distribución normal, con media $E(\mathbf{X})$ y desviación estándar σ_x. Para poder usar (16), requerimos conocer $E(\mathbf{B}_r)$. Si $\mathbf{X}$ está normalmente distribuida, para la determinación de $E(\mathbf{B}_r)$ necesitamos conocer la función de pérdida normal.

DEFINICIÓN ■ La **función de pérdida normal**, $NL(y)$, está definida por el hecho de que $\sigma_X NL(y)$ es el número esperado de déficit que ocurrirá durante un plazo de entrega si (1) la demanda en el plazo de entrega está normalmente distribuida con media $E(\mathbf{X})$ y distribución estándar σ_x y (2) el punto de reabastecimiento es $E(\mathbf{X}) + y\sigma_X$. ■

En pocas palabras, si conservamos y desviaciones estándar (desde el punto de vista de la demanda en el plazo de entrega) de las existencias de seguridad, entonces $NL(y)\sigma_x$ es el número esperado de déficit durante un plazo de entrega.

Puesto que un punto de reabastecimiento elevado ocasiona pocos faltantes, esperaríamos que $NL(y)$ sea una función no creciente de y. De hecho, éste es el caso. La función $NL(y)$ se presenta en la tabla 13. Por ejemplo, $NL(0) = 0.3989$ significa que si el punto de reabastecimiento es igual a la demanda esperada en el plazo de entrega y la desviación estándar de la demanda en el plazo de entrega es σ_X, entonces ocurrirá un promedio de $0.3989\sigma_X$ déficit durante un plazo de entrega. De igual modo, $NL(2) = 0.0085$ significa que si el punto de reabastecimiento excede por $2\sigma_X$ la demanda media en el plazo de entrega, entonces un promedio de $0.0085\sigma_x$ déficit se presentará durante un plazo de entrega dado. $NL(y)$ no se tabula para valores negativos de y. La razón es que se puede demostrar que para $y \leq 0$, $NL(y) = NL(-y) - y$. Por ejemplo, $NL(-2) = NL(2) + 2 = 2.0085$. Esto quiere decir que si el punto de reabastecimiento es $2\sigma_x$ menor que la demanda media en el plazo de entrega, entonces habrá un promedio de $2.0085\sigma_X$ déficit durante cada ciclo.

Se puede aplicar LINGO con la función **@PSL** para calcular valores de la función de pérdida normal. En LINGO, el programa

```
MODEL:
  x = @PSL(2);
END
```

genera un valor de $x = .0085$.

TABLA 13
Función de pérdida normal

x	$NL(x)$	x	$NL(x)$	x	$NL(x)$
0.00	0.3989	0.40	0.2304	0.80	0.1202
0.01	0.3940	0.41	0.2270	0.81	0.1181
0.02	0.3890	0.42	0.2236	0.82	0.1160
0.03	0.3841	0.43	0.2203	0.83	0.1140
0.04	0.3793	0.44	0.2169	0.84	0.1120
0.05	0.3744	0.45	0.2137	0.85	0.1100
0.06	0.3697	0.46	0.2104	0.86	0.1080
0.07	0.3649	0.47	0.2072	0.87	0.1061
0.08	0.3602	0.48	0.2040	0.88	0.1042
0.09	0.3556	0.49	0.2009	0.89	0.1023
0.10	0.3509	0.50	0.1978	0.90	0.1004
0.11	0.3464	0.51	0.1947	0.91	0.09860
0.12	0.3418	0.52	0.1917	0.92	0.09680
0.13	0.3373	0.53	0.1887	0.93	0.09503
0.14	0.3328	0.54	0.1857	0.94	0.09328
0.15	0.3284	0.55	0.1828	0.95	0.09156
0.16	0.3240	0.56	0.1799	0.96	0.08986
0.17	0.3197	0.57	0.1771	0.97	0.08819
0.18	0.3154	0.58	0.1742	0.98	0.08654
0.19	0.3111	0.59	0.1714	0.99	0.08491
0.20	0.3069	0.60	0.1687	1.00	0.08332
0.21	0.3027	0.61	0.1659	1.01	0.08174
0.22	0.2986	0.62	0.1633	1.02	0.08019
0.23	0.2944	0.63	0.1606	1.03	0.07866
0.24	0.2904	0.64	0.1580	1.04	0.07716
0.25	0.2863	0.65	0.1554	1.05	0.07568
0.26	0.2824	0.66	0.1528	1.06	0.07422
0.27	0.2784	0.67	0.1503	1.07	0.07279
0.28	0.2745	0.68	0.1478	1.08	0.07138
0.29	0.2706	0.69	0.1453	1.09	0.06999
0.30	0.2668	0.70	0.1429	1.10	0.06862
0.31	0.2630	0.71	0.1405	1.11	0.06727
0.32	0.2592	0.72	0.1381	1.12	0.06595
0.33	0.2555	0.73	0.1358	1.13	0.06465
0.34	0.2518	0.74	0.1334	1.14	0.02034
0.35	0.2481	0.75	0.1312	1.15	0.06210
0.36	0.2445	0.76	0.1289	1.16	0.06086
0.37	0.2409	0.77	0.1267	1.17	0.05964
0.38	0.2374	0.78	0.1245	1.18	0.05844
0.39	0.2339	0.79	0.1223	1.19	0.05726

(Continúa)

TABLA 13
(Continuación)

x	$NL(x)$	x	$NL(x)$	x	$NL(x)$
1.20	0.05610	1.60	0.02324	2.00	0.008491
1.21	0.05496	1.61	0.02270	2.01	0.008266
1.22	0.05384	1.62	0.02217	2.02	0.008046
1.23	0.05274	1.63	0.02165	2.03	0.007832
1.24	0.05165	1.64	0.02114	2.04	0.007623
1.25	0.05059	1.65	0.02064	2.05	0.007418
1.26	0.04954	1.66	0.02015	2.06	0.007219
1.27	0.04851	1.67	0.01967	2.07	0.007024
1.28	0.04750	1.68	0.01920	2.08	0.006835
1.29	0.04650	1.69	0.01874	2.09	0.006649
1.30	0.04553	1.70	0.01829	2.10	0.006468
1.31	0.04457	1.71	0.01785	2.11	0.006292
1.32	0.04363	1.72	0.01742	2.12	0.006120
1.33	0.04270	1.73	0.01699	2.13	0.005952
1.34	0.04179	1.74	0.01658	2.14	0.005788
1.35	0.04090	1.75	0.01617	2.15	0.005628
1.36	0.04002	1.76	0.01578	2.16	0.005472
1.37	0.03916	1.77	0.01539	2.17	0.005320
1.38	0.03831	1.78	0.01501	2.18	0.005172
1.39	0.03748	1.79	0.01464	2.19	0.005028
1.40	0.03667	1.80	0.01428	2.20	0.004887
1.41	0.03587	1.81	0.01392	2.21	0.004750
1.42	0.03508	1.82	0.01357	2.22	0.004616
1.43	0.03431	1.83	0.01323	2.23	0.004486
1.44	0.03356	1.84	0.01290	2.24	0.004358
1.45	0.03281	1.85	0.01257	2.25	0.004235
1.46	0.03208	1.86	0.01226	2.26	0.004114
1.47	0.03137	1.87	0.01195	2.27	0.003996
1.48	0.03067	1.88	0.01164	2.28	0.003882
1.49	0.02998	1.89	0.01134	2.29	0.003770
1.50	0.02931	1.90	0.01105	2.30	0.003662
1.51	0.02865	1.91	0.01077	2.31	0.003556
1.52	0.02800	1.92	0.01049	2.32	0.003453
1.53	0.02736	1.93	0.01022	2.33	0.003352
1.54	0.02674	1.94	0.009957	2.34	0.003255
1.55	0.02612	1.95	0.009698	2.35	0.003159
1.56	0.02552	1.96	0.009445	2.36	0.003067
1.57	0.02494	1.97	0.009198	2.37	0.002977
1.58	0.02436	1.98	0.008957	2.38	0.002889
1.59	0.02380	1.99	0.008721	2.39	0.002804

(Continúa)

TABLA 13
(Continuación)

x	$NL(x)$	x	$NL(x)$	x	$NL(x)$
2.40	0.002720	2.80	0.0007611	3.20	0.0001852
2.41	0.002640	2.81	0.0007359	3.21	0.0001785
2.42	0.002561	2.82	0.0007115	3.22	0.0001720
2.43	0.002484	2.83	0.0006879	3.23	0.0001657
2.44	0.002410	2.84	0.0006650	3.24	0.0001596
2.45	0.002337	2.85	0.0006428	3.25	0.0001537
2.46	0.002267	2.86	0.0006213	3.26	0.0001480
2.47	0.002199	2.87	0.0006004	3.27	0.0001426
2.48	0.002132	2.88	0.0005802	3.28	0.0001373
2.49	0.002067	2.89	0.0005606	3.29	0.0001322
2.50	0.002004	2.90	0.0005417	3.30	0.0001273
2.51	0.001943	2.91	0.0005233	3.31	0.0001225
2.52	0.001883	2.92	0.0005055	3.32	0.0001179
2.53	0.001826	2.93	0.0004883	3.33	0.0001135
2.54	0.001769	2.94	0.0004716	3.34	0.0001093
2.55	0.001715	2.95	0.0004555	3.35	0.0001051
2.56	0.001662	2.96	0.0004398	3.36	0.0001012
2.57	0.001610	2.97	0.0004247	3.37	0.00009734
2.58	0.001560	2.98	0.0004101	3.38	0.00009365
2.59	0.001511	2.99	0.0003959	3.39	0.00009009
2.60	0.001464	3.00	0.0003822	3.40	0.00008666
2.61	0.001418	3.01	0.0003689	3.41	0.00008335
2.62	0.001373	3.02	0.0003560	3.42	0.00008016
2.63	0.001330	3.03	0.0003436	3.43	0.00007709
2.64	0.001288	3.04	0.0003316	3.44	0.00007413
2.65	0.001247	3.05	0.0003199	3.45	0.00007127
2.66	0.001207	3.06	0.0003087	3.46	0.00006852
2.67	0.001169	3.07	0.0002978	3.47	0.00006587
2.68	0.001132	3.08	0.0002873	3.48	0.00006331
2.69	0.001095	3.09	0.0002771	3.49	0.00006085
2.70	0.001060	3.10	0.0002672	3.50	0.00005848
2.71	0.001026	3.11	0.0002577	3.51	0.00005620
2.72	0.0009928	3.12	0.0002485	3.52	0.00005400
2.73	0.0009607	3.13	0.0002396	3.53	0.00005188
2.74	0.0009295	3.14	0.0002311	3.54	0.00004984
2.75	0.0008992	3.15	0.0002227	3.55	0.00004788
2.76	0.0008699	3.16	0.0002147	3.56	0.00004599
2.77	0.0008414	3.17	0.0002070	3.57	0.00004417
2.78	0.0008138	3.18	0.0001995	3.58	0.00004242
2.79	0.0007870	3.19	0.0001922	3.59	0.00004073

(Continúa)

TABLA 13
(Continuación)

x	NL(x)	x	NL(x)	x	NL(x)
3.60	0.00003911	3.75	0.00002103	3.90	0.00001108
3.61	0.00003755	3.76	0.00002016	3.91	0.00001061
3.62	0.00003605	3.77	0.00001933	3.92	0.00001016
3.63	0.00003460	3.78	0.00001853	3.93	0.00000972
3.64	0.00003321	3.79	0.00001776	3.94	0.000009307
3.65	0.00003188	3.80	0.00001702	3.95	0.000008908
3.66	0.00003059	3.81	0.00001632	3.96	0.000008525
3.67	0.00002935	3.82	0.00001563	3.97	0.000008158
3.68	0.00002816	3.83	0.00001498	3.98	0.000007806
3.69	0.00002702	3.84	0.00001435	3.99	0.000007469
3.70	0.00002592	3.85	0.00001375	4.00	0.000007145
3.71	0.00002486	3.86	0.00001317		
3.72	0.00002385	3.87	0.00001262		
3.73	0.00002287	3.88	0.00001208		
3.74	0.00002193	3.89	0.00001157		

Fuente: Tomado con autorización de R. Peterson y E. Silver, *Decision Systems for Inventory and Production Planning*. © 1998 John Wiley & Sons, Nueva York.

Si suponemos una demanda normal en el plazo de entrega, calculemos ahora el punto de reabastecimiento r que generará un nivel deseado de SLM_1 (expresado como una fracción). Un punto de reabastecimiento de r corresponde a sostener

$$y = \frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}$$

desviaciones estándar de existencias de seguridad. En estas circunstancias, de la definición de la función de pérdida normal se infiere que durante un plazo de entrega, un punto de reabastecimiento r origina un número esperado de faltantes $E(\mathbf{B}_r)$ dado por

$$E(\mathbf{B}_r) = \sigma_{\mathbf{X}} NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right) \tag{17}$$

Al sustituir (17) en (16), se obtiene el punto de reabastecimiento para SLM_1 con demanda normal en el plazo de entrega:

$$1 - SLM_1 = \frac{\sigma_{\mathbf{X}} NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right)}{q}$$

$$NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right) = \frac{q(1 - SLM_1)}{\sigma_{\mathbf{X}}} \tag{18}$$

Con excepción de r, se conocen todas las cantidades de (18). Por lo tanto, (18) y la tabla 13 se pueden utilizar para determinar el punto de reabastecimiento que corresponde a un nivel dado de SLM_1.

EJEMPLO 7 Bads, Inc

Esta compañía vende cada año un promedio de 1000 procesadores de alimentos. Cada pedido de este electrodoméstico que hace Bads cuesta 50 dólares. El plazo de entrega es de un mes. Cuesta 10 dólares sostener un procesador de alimentos en inventario durante un año. La demanda anual de estos aparatos sigue una distribución normal, con desviación estándar de 69.28. Por cada uno de los valores siguientes de SLM_1, determine el punto de reabastecimiento: 80%, 90%, 95%, 99%, 99.9%.

Solución Observe que $E(\mathbf{D}) = 1\,000$, $K = \$50$ y $h = \$10$, de modo que

$$q = \left[\frac{2(50)(1000)}{10}\right]^{1/2} = 100$$

Asimismo,

$$E(\mathbf{X}) = (\tfrac{1}{12})(1000) = 83.33 \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \frac{69.28}{\sqrt{12}} = 20$$

De acuerdo con (18), el punto de reabastecimiento para un valor de 80% de SLM_1 debe satisfacer

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{100(1 - 0.80)}{20} = 1$$

En la tabla 13 se observa que 1 es mayor que cualquiera de los valores tabulados de la función de pérdida normal. Por lo tanto, el valor de r debe hacer a $\frac{r-83.33}{20}$ un número negativo. Mediante ensayo y error se descubre que $NL(-0.9) = NL(0.9) + 0.9 = 1.004$. De aquí,

$$\frac{r - 83.33}{20} = -0.9$$

$$r = 83.33 - 20(0.9) = 65.33$$

Para $SLM_1 = 0.90$, la ecuación (18) muestra que el punto de reabastecimiento debe satisfacer

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{(1 - 0.90)100}{20} = 0.5$$

Una vez más, 0.5 es mayor que todos los valores tabulados de la función de pérdida normal. Por lo tanto, $\frac{r-83.33}{20}$ debe ser un número negativo. Mediante ensayo y error llegamos a $N(-0.19) = N(0.19) + 0.19 = 0.5011$. Entonces, el punto de reabastecimiento para un nivel de servicio de 90% debe satisfacer

$$\frac{r - 83.33}{20} = -0.19$$

$$r = 83.33 - 20(0.19) = 79.53$$

Un nivel de servicio de 90% se alcanza con un punto de reabastecimiento que es menor que la demanda esperada en el plazo de entrega.

Para alcanzar un nivel de servicio de 95%, r debe cumplir con

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{(1 - 0.95)100}{20} = 0.25$$

Como $NL(0.34) = 0.2518$,

$$\frac{r - 83.33}{20} = 0.34$$

$$r = 83.33 + 20(0.34) = 90.13$$

Para un nivel de servicio de 99%,

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{(1 - 0.99)100}{20} = 0.05$$

Ya que $NL(1.25) = 0.0506$, vemos que

$$\frac{r - 83.33}{20} = 1.25$$

$$r = 83:33 + 20(1.25) = 108.33$$

TABLA 14
Puntos de reabastecimiento para varios niveles de servicio

SLM_1	Punto de reabastecimiento
80%	65.33
90%	79.53
95%	90.13
99%	108.33
99.9%	127.13

Por último, para un nivel de servicio de 99.9%, r debe satisfacer

$$\frac{r - 83.33}{20} = \frac{(1 - 0.999)100}{20} = 0.005$$

Ya que $NL(2.19) = 0.005$,

$$\frac{r - 83.33}{20} = 2.19$$

$$r = 83.33 + 20(2.19) = 127.13$$

En resumen, los puntos de reabastecimiento que corresponden a los distintos valores de SLM_1 se proporcionan en la tabla 14. Observe que para pasar de un nivel de servicio de 80% a uno de 90% es necesario aumentar el punto de reabastecimiento en 14.20, pero para ir de un nivel de servicio de 90% a uno de 99.9%, el punto de reabastecimiento debe aumentar 47.60. Para niveles de servicio superiores se requiere un incremento mucho mayor en el punto de reabastecimiento, a fin de producir un incremento del mismo tamaño en el nivel de servicio.

Cálculo del nivel del punto de reabastecimiento para SLM_1 mediante LINGO

Si se usa la función @PSL de LINGO, es un asunto sencillo calcular el nivel del punto de reabastecimiento para SLM_1. Por ejemplo, para calcular el punto de reabastecimiento del ejemplo 7 que corresponde a $SLM_1 = .90$ con LINGO, usaríamos el programa

```
MODEL:
1) @PSL((R - 83.33)/20) = 100*(1 - SLM1)/20;
2) SLM1 = .9;
```

Este programa proporciona una $r = 79.57$. Observe que al modificar el lado derecho del renglón 2 se calculan rápidamente los puntos de reabastecimiento para varios valores de SLM_1.

Cálculo de la función de pérdida normal mediante Excel

Se puede demostrar que

$NL(y)$ = (altura de la densidad normal en y) $-$ y*(probabilidad normal estándar es mayor que o igual a y)

Normalloss.xls

por lo tanto, en el archivo Normalloss.xls, calculamos $NL(y)$ con la fórmula de Excel

=NORMDIST(D3,0,1,0)-D3*(1-NORMSDIST(D3))

	B	C	D	E
1		Cálculo de la función		
2		de pérdida normal		
3		y	2	
4		NL(y)	0.008491	
5				
6				

FIGURA 5

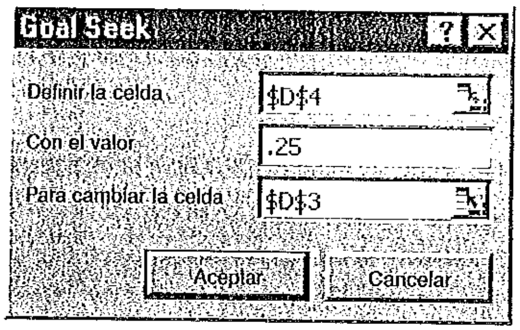


FIGURA 6

	B	C	D	E
1		Cálculo de la función		
2		de pérdida normal		
3		y	0.344868	
4		NL(y)	0.25	
5				
6				

FIGURA 7

Recuerde que NORMDIST (NORMDIST, en el programa en inglés) con el último argumento 0 calcula la función de densidad para una variable aleatoria normal, y NORMDIST( ) calcula la probabilidad acumulativa normal estandarizada. Por ejemplo, de acuerdo con la figura 5, $NL(2) = 0.008491$ (consistente con la tabla 14).

Con el fin de ilustrar el uso de esta hoja de cálculo, recuerde que en el ejemplo 7 es necesario encontrar un valor de y tal que $NL(y) = .25$. Para hacerlo, usamos Buscar objetivo del menú Herramientas, y llenamos el cuadro de diálogo como se muestra en la figura 6. De esta manera se le indica a Excel que cambie la celda D3 hasta que la celda D4 (el valor de la pérdida normal) llegue a .25. El resultado de la figura 7 muestra que $NL(.345) = .25$. Antes de hacer lo de Buscar objetivo, debe ir a Herramientas y, en Opciones, seleccione Calcular; ahí cambie el cuadro de Cambio máximo a un número muy pequeño, tal como .0000001. Lo anterior obliga a Excel a establecer la celda dentro de .000001 de su valor deseado.

Determinación del punto de reabastecimiento y el nivel de existencias de seguridad para SLM_1

Suponga que un administrador quiere mantener suficientes existencias de seguridad para tener la certeza de que un promedio de s_0 ciclos por año resultará en un agotamiento de existencias. Dado un punto de reabastecimiento r, una fracción $P(\mathrm{X} > r)$ de todos los ciclos ocasionará un agotamiento de existencias. Como se presenta un promedio de $\frac{E(\mathbf{D})}{q}$ ciclos por año (recuerde que estamos suponiendo acumulación), entonces un promedio de $\frac{P(\mathrm{X}>r)E(\mathbf{D})}{q}$ ciclos por año da por resultado un agotamiento de existencias. Por lo tanto, dado s_0, el punto de reabastecimiento es el valor más pequeño de r que satisface

$$\frac{P(\mathrm{X} > r)\, E(\mathbf{D})}{q} \leq s_0 \qquad \text{o} \qquad P(\mathrm{X} > r) \leq \frac{s_0 q}{E(\mathbf{D})}$$

Si **X** es una variable aleatoria continua, entonces $P(\mathbf{X} > r) = P(\mathbf{X} \geq r)$. Por consiguiente, obtenemos el punto de reabastecimiento r para SLM_2 en el caso de demanda continua en el plazo de entrega,

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{s_0 q}{E(\mathbf{D})} \tag{19}$$

y el punto de reabastecimiento para SLM_2 en el caso de demanda discreta en el plazo de entrega cuando se elige el valor mínimo de r que satisface

$$P(\mathbf{X} > r) \leq \frac{s_0 q}{E(\mathbf{D})} \tag{19'}$$

Con el objeto de ilustrar la determinación del punto de reabastecimiento para SLM_2, supongamos que Bads, Inc., quiere asegurar que el agotamiento de existencias ocurre durante un promedio de dos plazos de entrega por año. Refiérase al ejemplo 7, donde EOQ = 100, $E(\mathbf{D})$ = 1000 unidades por año y **X** es N(83.33, 400). Ahora (19) genera $P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{2(100)}{1000} = .2$. El punto de reabastecimiento r se calcula con Excel. Como

=NORMINV(.8,83.33,20)

da 100.16, encontramos que r = 100.16. El nivel de existencias de seguridad que origina que las existencias se agoten un promedio de dos veces por año sería $100.16 - E(\mathbf{X}) = 16.83$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Refiérase al problema 1 de la sección 16.6. Determine el punto de reabastecimiento que origina valores de 80%, 90%, 95% y 99% de SLM_1. ¿Qué punto de reabastecimiento daría un promedio de 0.5 agotamiento de existencias al año?

2 Determine el punto de reabastecimiento que da valores de 80%, 90%, 95% y 99% de SLM_1. ¿Qué punto de reabastecimiento daría un promedio de dos agotamientos de existencias al año?

3 Suponga que la EOQ es 100, la demanda promedio anual es 1000 unidades y la demanda en el plazo de entrega es una variable aleatoria que tiene la distribución que se indica en la tabla 15.

a ¿Qué valor de SLM_1 corresponde a un punto de reabastecimiento de 25?

b Si quisiéramos alcanzar un valor de 95% de SLM_1, ¿qué punto de reabastecimiento deberíamos elegir?

c Si quisiéramos un promedio de cuando mucho dos agotamientos de existencias por año, ¿qué punto de reabastecimiento deberíamos elegir?

TABLA 15

Demanda en el plazo de entrega	Probabilidad
10	$\frac{1}{6}$
15	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
25	$\frac{1}{12}$
30	$\frac{1}{4}$

4 Una compañía tiene una demanda cuya media es de 100 unidades por día. La demanda en el plazo de entrega sigue una distribución normal, con una media de 1000 unidades y una desviación estándar de 200 unidades. Cuesta 6 dólares almacenar una unidad durante un año. Si la compañía quiere cumplir con 90% de toda la demanda a tiempo, ¿cuál será el costo anual de mantener una existencia de seguridad? (Suponga que cada pedido cuesta 50 dólares.)

16.8 Estrategia de revisión periódica (R, S)[†]

Una estrategia de revisión periódica que se utiliza ampliamente se trata en esta sección: la estrategia (R, S). Antes de explicar el funcionamiento de esta estrategia es necesario definir el concepto de **nivel de inventario en pedido.** El nivel de inventario en pedido es simplemente la suma de un inventario disponible y del inventario pedido. Por lo tanto, si están disponibles 30 unidades y pedimos 70 unidades (con un plazo de entrega de, por ejemplo, un mes), el nivel de inventario en pedido es 100.

[†]En esta sección se tratan temas que se podrían omitir sin que se pierda la continuidad.

Ahora ya podemos explicar el funcionamiento de la estrategia de inventario (R, S). Cada R unidades de tiempo (digamos, años), se revisa el nivel del inventario disponible y se hace un pedido para llevar el nivel de inventario en pedido hasta S. Por ejemplo, si aplicáramos una estrategia (.25, 100), revisaríamos el nivel del inventario al final de cada trimestre. Si la existencia fuera $i < 100$ unidades, se haría un pedido de $100 - i$ unidades. En general, una estrategia (R, S) generaría costos de almacenamiento más altos que una estrategia (r, q) que minimiza los costos, pero una estrategia (R, S) es más fácil de administrar que una estrategia de revisión continua. Con una estrategia (R, S) (al contrario que con la estrategia de revisión continua), es posible predecir con certeza las veces en que se hace un pedido. Una estrategia (R, S) permite también que una compañía coordine su abastecimiento. Por ejemplo, una compañía podría usar $R = 1$ mes para todos los productos que se piden a un mismo proveedor, y luego pedir todos los productos de ese proveedor el primer día de cada mes.

Ahora suponga que el intervalo de revisión R ya se determinó, y se enfoca en la determinación de un valor para S que minimizará los costos anuales esperados. En esta misma sección, pero más adelante, analizaremos cómo determinar un valor apropiado para R. Suponga ahora que todos los faltantes se acumulan y la demanda es una variable aleatoria continua cuya distribución permanece sin cambios en el tiempo. Por último, suponga que el precio de compra por unidad es constante. Esto implica que los costos de compra anuales no dependen de la elección de R y de S. Defina

$$
\begin{aligned}
R &= \text{tiempo en años entre revisiones}\\
\mathbf{D} &= \text{demanda (aleatoria) durante un periodo de un año}\\
E(\mathbf{D}) &= \text{demanda media durante un periodo de un año}\\
K &= \text{costo por hacer un pedido}\\
J &= \text{costo por revisar el nivel de inventario}\\
h &= \text{costo por mantener un producto en inventario durante un año}\\
c_B &= \text{costo generado por cada unidad faltante en el caso de}\\
&\quad\ \text{acumulación (se supone que es independiente del tiempo}\\
&\quad\ \text{necesario para que el pedido sea surtido)}\\
L &= \text{plazo de entrega de cada pedido (se supone que es constante)}\\
\mathbf{D}_{L+R} &= \text{demanda (aleatoria) durante un periodo } L + R\\
E(\mathbf{D}_{L+R}) &= \text{media de } \mathbf{D}_{L+R}\\
\sigma_{\mathbf{D}_{L+R}} &= \text{desviación estándar de } \mathbf{D}_{L+R}
\end{aligned}
$$

Dado un valor de R, es posible determinar un valor de S que minimice los costos anuales esperados. Esta deducción es similar a la derivación de (13). Para una elección dada de R y S, los costos esperados se obtienen con

$$
\begin{aligned}
&(\text{Costos anuales de compra esperados}) + (\text{costos anuales de revisión})\\
&\quad + (\text{costos anuales por hacer los pedidos})\\
&\quad + (\text{costos anuales esperados por mantener un producto})\\
&\quad + (\text{costos anuales esperados por déficit})
\end{aligned}
$$

Como se hacen $\frac{1}{R}$ revisiones por año, $\frac{J}{R}$ da los costos anuales de revisión. Observe también que cuando se hace un pedido el nivel de inventario en pedido es igual a S. El único modo en que un pedido no se haga en el próximo punto de revisión es si $\mathbf{D}_{L+R} = 0$. Puesto que $\mathbf{D}_{L+R}$ es una variable aleatoria continua, la probabilidad de que $\mathbf{D}_{L+R} = 0$ es cero. Por lo tanto, es seguro que se hará un pedido el próximo punto de revisión (o en cualquier punto de revisión). Esto significa que el costo anual por hacer un pedido se obtiene con $K(\frac{1}{R}) = \frac{K}{R}$. Observe que tanto el costo anual por hacer un pedido como el costo de la revisión son independientes de S. Por lo tanto, el valor de S que minimiza los costos anuales esperados será el valor de S que minimiza (costos anuales esperados por conservar un producto) + (costos anuales esperados por déficit).

Con el fin de determinar el costo anual esperado por conservar un producto para una estrategia dada (R, S), se define primero un ciclo que será el intervalo entre la llegada de los pedidos. Si es posible determinar el valor esperado del nivel promedio del inventario sobre un ciclo, entonces el costo anual esperado por conservar un producto es justamente h(valor esperado del nivel del inventario disponible sobre un ciclo). Al igual que en la deducción de (11), suponemos ahora que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en relación con el nivel promedio de inventario disponible. Entonces, como en la sección 16.6,

$$\text{Valor esperado de } I(t) \cong \text{valor esperado de } OHI(t)$$

Entonces, se podría aproximar el valor esperado de $I(t)$ sobre un ciclo mediante 0.5(valor esperado de $I(t)$ justo antes de que llegue un pedido) + 0.5(valor esperado de $I(t)$ justo después de que llega un pedido).

Justo antes de que llegue un pedido, el nivel de inventario máximo en pedido (S) se ha reducido por un promedio de $E(\mathbf{D}_{L+R})$. Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$ justo antes que llegue el pedido es $= S - E(\mathbf{D}_{L+R})$.

Como se hacen cada año $\frac{1}{R}$ pedidos y se tiene que pedir cada año un promedio de $E(\mathbf{D})$ unidades, el tamaño promedio de un pedido es $E(\mathbf{D})R$. Por lo tanto,

$$\text{Valor esperado de } I(t) \text{ justo después que llega un pedido} = S - E(\mathbf{D}_{L+R}) + E(\mathbf{D})\text{R}$$

Entonces,

$$\text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante un ciclo} = S - E(\mathbf{D}_{L+R}) + \frac{E(\mathbf{D})R}{2}$$

Por lo tanto,

$$\text{Costo anual esperado por conservar un producto} = h\left[S - E(\mathbf{D}_{L+R}) + \frac{E(\mathbf{D})R}{2}\right]$$

A partir de esta expresión se infiere que al incrementar S a $S + \Delta$ aumentarán los costos anuales esperados por mantener un producto en $h\Delta$.

Por ahora enfoquémonos en el modo en que un incremento desde S hasta $S + \Delta$ afecta los costos anuales esperados por los déficit o faltantes. Luego podemos aplicar el análisis marginal para hallar el valor de S que minimiza la suma del costo anual esperado por mantener un producto y el costo anual esperado por los faltantes. Definamos los déficit "asociados" con cada pedido como los faltantes que hay en el intervalo entre la llegada de un pedido y la llegada del pedido siguiente. Por ejemplo, un pedido colocado en el tiempo 0 llega en el tiempo L y el pedido siguiente no llegará sino hasta el tiempo $R + L$. Por lo tanto, todos los faltantes que haya entre L y $R + L$ se asocian con el pedido del tiempo 0. Es evidente que la suma de todos los faltantes será igual a la suma de los faltantes asociados con todos los pedidos. Una vez más concentrémonos en los faltantes asociados con el pedido del tiempo 0. Puesto que el pedido siguiente llega en el tiempo $R + L$, y el pedido del tiempo 0 llevó el nivel de inventario en pedido hasta S, se asocia un déficit con el pedido del tiempo 0 si y sólo si la demanda entre el tiempo 0 y $R + L$ es mayor que S. Si hay un déficit, la magnitud de éste es de $\mathbf{D}_{L+R} - S$.

Ahora ya podemos aplicar el análisis marginal para determinar (para un R dado) el valor de S que minimiza la suma del costo anual esperado por mantener un producto y el costo anual esperado por los faltantes. Si incrementamos S a $S + \Delta$, los costos anuales esperados por mantener un producto sufren un aumento de $h\Delta$. Al aumentar S a $S + \Delta$ disminuirán los faltantes asociados con un pedido si $\mathbf{D}_{L+R} \geq S$. Por lo tanto, para una fracción $P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S)$ de todos los pedidos, al incrementar S a $S + \Delta$ hay un ahorro de $c_B\Delta$ en los costos por los déficits. Como se hacen cada año $\frac{1}{R}$ pedidos, si se incrementa S a $S + \Delta$ disminuyen los costos anuales esperados por déficit en una cantidad $(\frac{1}{R})c_B\Delta P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S)$. El análisis marginal implica entonces que el valor de S que minimiza la suma del costo anual esperado por mantener un producto y el costo anual esperado por los faltantes será el que satisfaga

$$h\,\Delta = (\tfrac{1}{R})c_B\Delta P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S)$$

o bien,

$$P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{c_B} \tag{20}$$

Suponga que todos los faltantes dan por resultado ventas perdidas, y que se genera un costo c_{LS} (que incluye costo por déficit más ganancia perdida) por cada venta perdida. Entonces el valor de S que minimiza la suma del costo anual esperado por mantener un producto y el costo anual esperado por los faltantes está dado por

$$P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{Rh + c_{LS}} \tag{21}$$

El uso de esta ecuación se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 Electrodomésticos Lowland

Esta compañía reabastece sus *stock* de televisores a color tres veces al año. Cada pedido tarda $\frac{1}{9}$ de año en llegar. La demanda anual de televisores a color es de $N(990, 1600)$. El costo por mantener un televisor a color en inventario durante un año es de 100 dólares. Suponga que todos los déficits se acumulan con un costo por faltante de 150 dólares por televisor. Cuando Lowland hace un pedido, ¿cuál debe ser el inventario en pedido?

Solución Sabemos que $R = \frac{1}{3}$ año, $L = \frac{1}{9}$ año, $R + L = \frac{4}{9}$ año y $c_B = \$150$. $\mathbf{D}_{L+R}$ sigue una distribución normal, con $E(\mathbf{D}_{L+R}) = \frac{4}{9}(990) = 440$ y $\sigma_{\mathbf{D}_{L+R}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\sqrt{1600} = 26.67$. De acuerdo con (20), S se debe escoger de tal manera que satisfaga

$$P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S) = \frac{(\frac{1}{3})\,100}{150} = .22$$

Usamos la función NORMINV de Excel para calcular s. Como

=NORMINV(0.78,440,26.67)

da 460.59, cuando Lowland hace un pedido de televisores, debe pedir los suficientes para llevar el nivel de inventario en pedido hasta 460.59 (o 461) televisores. Por ejemplo, si hay en existencia 160 televisores cuando se efectúa una revisión, $461 - 160 = 301$ aparatos son los que se deben pedir.

Determinación de *R*

El intervalo de revisión R se fija, a menudo, en $\frac{\text{EOQ}}{E(\mathbf{D})}$. De esta manera, el número de pedidos hechos por año es igual al número recomendado si un modelo EOQ sencillo se usara para determinar el tamaño de los pedidos. Pero como cada pedido está acompañado por una revisión, debemos establecer el costo por pedido en $K + J$. Así se obtiene

$$\text{EOQ} = \sqrt{\frac{2(K + J)E(\mathbf{D})}{h}}$$

Con el objeto de ilustrar la idea, suponga que cuesta 500 dólares revisar el nivel de inventario y 5000 dólares hacer un pedido de televisores. Entonces,

$$\text{EOQ} = \sqrt{\frac{2(5500)(990)}{100}} = 330$$

De donde se infiere que un intervalo de revisión $R = \frac{330}{990} = \frac{1}{3}$ año.

Organización de un sistema (*R*, *S*)

Las tiendas al menudeo (tal como J. C. Penney) encuentran a menudo una estrategia (R, S) fácil de poner en marcha porque la cantidad pedida es igual a la cantidad de ventas que hay durante el periodo entre revisiones. Por ejemplo, suponga que se aplica una estrategia (1 mes, 1000), y que los pedidos se efectúan el primer día de cada mes. Si se venden 800 productos durante enero, entonces se debe hacer un pedido de 800 productos a principios de febrero para llevar otra vez el nivel de inventario en pedido hasta 1000. Si se programa una computadora para que haga pedidos cada mes iguales a las ventas mensuales, dicha estrategia se instituye con facilidad.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un hospital debe pedir el medicamento Porapill al laboratorio Daisy Drug. Cuesta 500 dólares hacer el pedido y 30 dólares revisar el inventario de medicamentos del hospital. La demanda anual del medicamento es de $N(10\ 000, 640\ 000)$, y cuesta 5 dólares mantener una unidad en inventario durante un año. Los pedidos llegan un mes después de que se hacen. Suponga que todos los faltantes se acumulan.

a Estime R y la cantidad de pedidos por año que se deben hacer.

b Utilice la respuesta del inciso (a) para determinar la estrategia óptima de inventario (R, S). Suponga que el costo por los déficits por unidad del medicamento es de 100 dólares.

2 La empresa Treadway Tires Dealer de Chicago debe pedir los neumáticos de su bodega nacional. Cuesta 10 000 dólares hacer un pedido y 400 dólares revisar el nivel de inventario. Las ventas anuales de neumáticos son de $N(20\ 000, 4\ 000\ 000)$. Cuesta 10 dólares al año mantener un neumático en inventario, y cada pedido llega dos semanas después de haber sido hecho (52 semanas = 1 año). Suponga que todos los faltantes se acumulan.

a Estime R y la cantidad de pedidos por año que se deben hacer.

b Utilice la respuesta del inciso (a) para determinar la estrategia óptima de inventario (R, S). Suponga que el costo por los déficits es de 100 dólares por neumático.

3 Suponga que encontramos la estrategia óptima (R, S) para el caso de los pedidos pendientes y que $S = 50$. ¿Lo siguiente es verdadero o falso?

El valor óptimo de S para el caso de las ventas perdidas tienen $S > 50$.

16.9 Sistema de clasificación de inventario ABC

Muchas compañías tienen que plantear estrategias para sus inventarios de miles de productos. En tal situación, una compañía no puede poner gran atención para determinar una estrategia "óptima" de inventario para cada producto. La **clasificación ABC**, diseñada en General Electric durante los años cincuenta del siglo pasado, ayuda a la compañía a identificar un pequeño porcentaje de sus productos que explican un gran porcentaje del valor en dólares de las ventas de cada año. Estos productos se denominan productos tipo A. Como la mayor parte de la inversión del inventario de la compañía está en productos tipo A, los esfuerzos concentrados en perfeccionar estrategias efectivas para controlar el inventario de estos productos deben generar ahorros importantes.

De acuerdo con estudios repetidos, 5 a 20% de todos los productos en existencia representa 55 a 65% de las ventas en la mayor parte de las compañías; éstos son productos tipo A. También se ha observado que 20 a 30% de todos los productos explican el 20 a 40% de las ventas; éstos son los productos tipo B. Por último, se encuentra a menudo que 50 a 75% de todos los productos representa sólo 5 a 25% de las ventas; éstos son los llamados productos tipo C. Con el fin de ilustrar la manera en que se determina cuáles son productos tipo A, tipo B y tipo C, considere una empresa que tiene en existencia 100 productos. Luego organice los productos como producto 1, producto 2, . . . , producto 100, donde el producto 1 genera el volumen de ventas más grande al año, el producto 2 está en segundo lugar en volumen de ventas, y así sucesivamente. Luego grafique los puntos (k, porcentaje de ventas anuales debido al k% principal de todos los productos). Por ejemplo, el punto (20, 60) indica que los 20 productos principales (desde el punto de vista de ventas en dólares) generan 60% de todas las ventas. Entonces obtiene una gráfica como la de la figura 8, donde los productos 1 a 20 son tipo A, los productos 21 a 40 son tipo B y los productos 41 a 100 son tipo C.

Como la mayor parte de la inversión del inventario está en productos tipo A, los niveles de servicio alto dan como resultado inversiones enormes en existencias de seguridad. Por lo tanto, Hax y Candea (1984) recomiendan que SLM_1 se fije en sólo 80 a 85% para productos tipo A. Esencial para productos es el control administrativo férreo de los procedimientos de pedido: se deben hacer predicciones individuales de demanda para cada producto tipo A. Asimismo, es necesario hacer un esfuerzo para reducir el plazo de entrega necesario para recibir pedidos o manufacturar el producto. Si se aplica una estrategia (R, S), R debe ser pequeño, quizá una semana. Así, es posible mantener en estrecha observación los niveles de inventario. Parámetros como estimaciones de la demanda media anual,

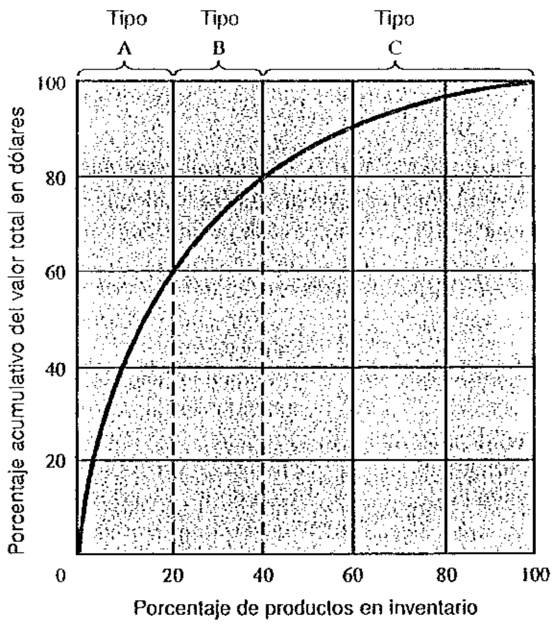


FIGURA 8
Ejemplo de la clasificación de inventario ABC

plazo de entrega, desviación estándar de la demanda anual y costos por los faltantes se deben revisar con frecuencia regular.

En lo que se refiere a los productos tipo B, Hax y Candea (1984), recomiendan que SLM_1 debe fijarse en 95%. Las estrategias de inventario para los productos tipo B se controlan por lo regular mediante una computadora. Los parámetros para los productos tipo B se deben revisar con menor frecuencia que los de los productos tipo A.

El sencillo sistema de las dos urnas es, por lo común, adecuado para los productos tipo C. Los parámetros se revisan una o dos veces al año. La demanda de los productos tipo C se podría predecir aplicando métodos de extrapolación simple. Se recomienda un valor alto para SLM_1 (casi siempre 98 o 99%). Se requiere poca inversión extra en existencias de seguridad para mantener estos altos niveles de servicio.

DEVRO Incorporated, un fabricante de membranas comestibles para cubrir las carnes frías, puso en marcha un análisis ABC de su inventario de sus repuestos, y encontró que 2.5% de todos los productos (los productos tipo A) explicaban el 49% del uso de los dólares y 24.7% de todos los productos (productos tipo B), el 38%. Luego de preparar por anticipado formas para requisición en el caso de los productos tipo A y tipo B, DEVRO fue capaz de disminuir de manera importante el plazo de entrega necesario para conseguir dichos productos. Esto ayudó a DEVRO a hacer grandes ahorros en los costos anuales de inventario. Véanse los detalles en Flowers y O'Neill (1978).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Trace una gráfica ABC para los datos de la tabla 16. ¿Qué productos se podrían clasificar como A, B y C?

TABLA 16

Producto	Uso anual	Costo unitario (en dólares)
1	20 000	20
2	23 000	10
3	20 000	3
4	30 000	2
5	5000	10
6	10 000	7
7	1000	30
8	2000	15
9	3000	10
10	5000	6

16.10 Curvas de cambio

Es difícil estimar exactamente los costos por conservar un producto y por déficit en muchos casos. Entonces se pueden usar las **curvas de cambio** para identificar estrategias "razonables" de inventario. Considere una compañía que tiene en inventario dos productos (1 y 2). Son posibles varias estrategias para los pedidos. Por ejemplo, la compañía podría pedir el producto 1 cinco veces al año, y el producto 2, diez veces al año (estrategia 1), o bien, se podría pedir cada producto una vez al año (estrategia 2). Evidentemente, la estrategia 1 ocasiona costos más altos por hacer los pedidos que la estrategia 2, pero la estrategia 2 genera costos más altos por guardar los productos y un nivel promedio de inventario superior que la estrategia 1. Una curva de cambio permite mostrar en forma gráfica la transacción entre los costos por hacer los pedidos y la inversión promedio en el inventario.

Con el fin de ilustrar el trazo de una curva de cambio, suponga que una compañía tiene en inventario dos productos (producto 1 y producto 2), y que

c_i = costo de compra de cada unidad del producto i

h = costo por mantener el valor de 1 dólar de cada producto en inventario durante un año

K_i = costo por hacer un pedido del producto i

q_i = EOQ para el producto i

D_i = demanda anual del producto i

Luego

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{hc_i}}$$

Suponga que la compañía quiere minimizar la suma de los costos de los pedidos anuales y de conservar en inventario un producto. Entonces debe seguir una estrategia EOQ para cada producto y pedir q_i del producto i $\frac{D_i}{q_i}$ veces por año. Dos medidas de efectividad para esta (o cualquier otra) estrategia de pedidos, son

AII = valor promedio del dólar de los costos de inventario

AOC = costos anuales por hacer los pedidos

Si seguimos la estrategia EOQ para cada producto, entonces

$$\begin{aligned}
\text{AII} &= \left(\frac{q_1}{2}\right)c_1 + \left(\frac{q_2}{2}\right)c_2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left\{c_1\sqrt{\frac{2K_1D_1}{c_1h}} + c_2\sqrt{\frac{2K_2D_2}{c_2h}}\right\} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{h}}\right)\{\sqrt{K_1D_1c_1} + \sqrt{K_2D_2c_2}\} \\
\text{AOC} &= K_1\left(\frac{D_1}{q_1}\right) + K_2\left(\frac{D_2}{q_2}\right) \\
&= K_1D_1\sqrt{\frac{c_1h}{2K_1D_1}} + K_2D_2\sqrt{\frac{c_2h}{2K_2D_2}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2h}}{2}\right)\{\sqrt{K_1D_1c_1} + \sqrt{K_2D_2c_2}\}
\end{aligned}$$

La expresión para AII se infiere del hecho de que el nivel promedio de inventario de un producto es igual a la mitad de la cantidad pedida. La expresión para AOC proviene del hecho de que se hacen $\frac{D_i}{q_i}$ pedidos por año del producto i.

Como h es a menudo difícil de estimar, supongamos que h es incógnita y veamos que un cambio en h afecta AII y AOC. Una gráfica de los puntos (AOC, AII) asociada con cada valor de h se conoce como **curva de cambio**. Para cualquier punto de la curva de cambio, observamos que

$$\text{AII(AOC)} = (\tfrac{1}{2})\{\sqrt{K_1 D_1 c_1} + \sqrt{K_2 D_2 c_2}\}^2 \tag{21}$$

Esto demuestra que la curva de cambio es una hipérbola. Además, cualquier punto en la curva de cambio satisface $\frac{\text{AII}}{\text{AOC}} = \frac{1}{h}$ o $\frac{\text{AOC}}{\text{AII}} = h$. Por lo tanto, para cualquier punto en la curva de cambio, el costo anual por almacenamiento por dólar de inventario es la relación entre la abscisa x y la ordenada y. Esto demuestra cómo cada punto sobre la curva de cambio puede identificarse con un valor de h.

A continuación se ilustra cómo se calcula una curva de cambio y cómo ayuda la curva en la toma de decisiones.

EJEMPLO 9 Curva de cambio

Una compañía tiene en inventario dos productos. La información pertinente se proporciona en la tabla 17.

1 Trace una curva de cambio.

2 La compañía pide en la actualidad cada producto diez veces por año. Demuestre a la administración mediante la curva de cambio que ésta es una mala estrategia para hacer los pedidos.

3 Suponga que la administración limita la inversión promedio de inventario de la compañía a 10 000. Utilice la curva de cambio para determinar una estrategia apropiada para hacer los pedidos.

Solución **1** De acuerdo con (21), la ecuación de la curva de cambio es

$$\begin{aligned}(\text{AII})(\text{AOC}) &= (\tfrac{1}{2})\{\sqrt{50(10\,000)(200)} + \sqrt{80(20\,000)(2.5)}\}^2\\ &= 72\,000\,000\end{aligned}$$

Algunos puntos representativos sobre la curva de cambio, junto con el valor asociado de h, se proporcionan en la tabla 18. La curva de cambio se grafica en la figura 9.

2 Si la compañía pide cada producto diez veces por año,

$$\begin{aligned}\text{AOC} &= 10(\$50) + 10(\$80) = \$1300\\ \text{AII} &= \tfrac{1}{2}(1000)(\$200) + \tfrac{1}{2}(2000)(\$2.50) = \$102\,500\end{aligned}$$

TABLA 17
Información para el ejemplo 9

	K_i	D_i	c_i
Producto 1	\$50	10 000	\$200
Producto 2	\$80	20 000	\$2.50

TABLA 18
Puntos sobre la curva de cambio

AOC	AII	h
\$2000	\$36 000	.06
\$3000	\$24 000	.13
\$4000	\$18 000	.22
\$5000	\$14 400	.35
\$6000	\$12 000	.50
\$8000	\$9000	.89

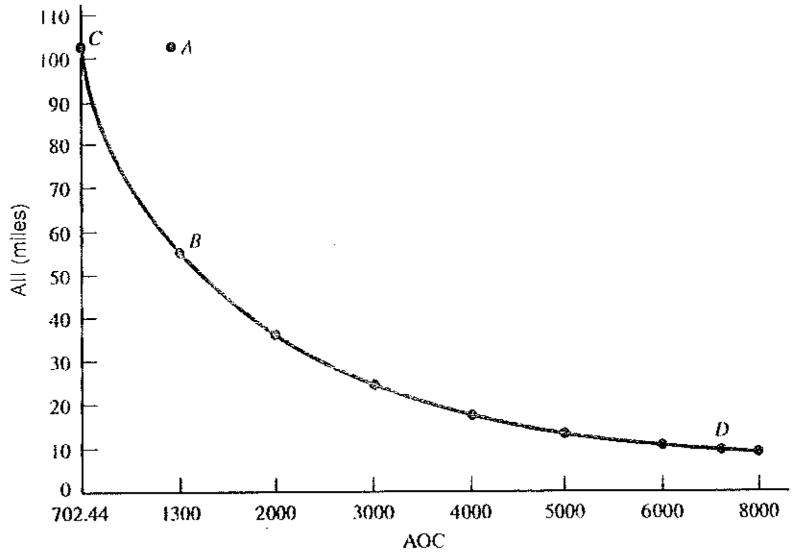


FIGURA 9
Ejemplo de una curva de cambio

Éste es el punto A de la figura 9. Observe que el punto $B = (1300, 55\ 385)$, que corresponde a $h = .02$ genera el mismo AOC que la estrategia actual, pero un AII mucho más bajo. Asimismo, el punto $C = (702.55, 102\ 500)$, que corresponde a $h = .01$, origina el mismo AII que la estrategia actual, pero un AOC mucho más bajo. Por lo tanto, es posible usar la curva de cambio para demostrar a la administración cómo mejorar la estrategia actual de hacer pedidos.

3 Según la curva de cambio, $D = (7200, 10\ 000)$ está sobre la curva. Por consiguiente, para un AII de 10 000, lo mejor que podemos hacer es mantener los costos por hacer pedidos en 7200 dólares, Naturalmente, la administración podría optar por AII = 9000 dólares y AOC = 8 000 dólares o una de muchas posibilidades. La cuestión es que la curva de cambio aclara muchas de las opciones que tiene disponibles la administración.

Curvas de cambio para el agotamiento de existencias

Las curvas de cambio se utilizan también para valorar las transacciones entre la inversión promedio en el inventario (AII) y la cantidad esperada de plazos de entrega por año, que dan por resultado agotamiento de existencias. Con el fin de ilustrarlo, considere una compañía que tiene en inventario un solo producto para el cual

c = costo de compra por unidad
K = costo preliminar (costo de inicio)
h = costo anual por mantener una unidad en inventario
c_B = costo del agotamiento de existencias (suponemos que todos los productos están pendientes)
$E(\mathbf{D})$ = demanda media anual
q = cantidad económica pedida
$\mathbf{X}$ = demanda en el plazo de entrega
$E(\mathbf{X})$ = demanda media en el plazo de entrega
$\sigma_{\mathbf{X}}$ = desviación estándar de la demanda en el plazo de entrega
r = punto de reabastecimiento (determinado con la ecuación (13))

Según (13), una fracción

$$\frac{qh}{c_B E(\mathbf{D})}$$

de todos los plazos de entrega, tendrá un agotamiento de existencias. Puesto que hay un promedio de $\frac{E(\mathbf{D})}{q}$ pedidos hechos al año, un promedio de

$$\left(\frac{E(\mathbf{D})}{q}\right)\left(\frac{qh}{c_B E(\mathbf{D})}\right) = \frac{h}{c_B}$$

plazos de entrega, o demoras en la entrega, por año da por resultado agotamiento de las existencias. De acuerdo con (11), sabemos que el nivel de inventario promedio es $(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X}))$. Por lo tanto, tenemos AII $= c(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X}))$.

Una curva de cambio para esta situación es una gráfica de los puntos (AII, SY) que corresponden a diferentes valores de c_B. Para ilustrar el trazo de una curva de cambio, sean $E(\mathbf{X}) = 200$, $\sigma_X = 50$, $E(\mathbf{D}) = 100\,000$, $K = \$12.50$, $h = \$10$ y $c = \$100$. Encontraremos cuatro puntos sobre la curva al hacer $c_B = 1, 5, 10$ y 20 dólares. Primero veremos que

$$q = \sqrt{\frac{2(12.5)(100\,000)}{10}} = 500$$

Las probabilidades de agotamiento de existencias y SY se proporcionan en la tabla 19.

Cuando se usa la tabla 2 del capítulo 12 o la función NORMSDIST( ) (NORMDIST( ) (en el programa en inglés) de Excel podemos calcular el punto de reabastecimiento r para cada valor de c_B. Luego determinamos el nivel promedio de inventario y AII = inversión promedio en el inventario. Estos cálculos se presentan en la tabla 20.

La curva de cambio (basada en los cuatro puntos que hemos calculado) se traza en la figura 10. Por ejemplo, en la curva de cambio se observa que si la AII actual es 33 250 dólares, entonces para un incremento de 3400 dólares en AII, podemos disminuir SY de 10 hasta 2, pero otro aumento en AII de 3400 dólares reduciría SY a menos de 2.

Superficies de cambio

Se puede derivar una **superficie de cambio** que contiene tres o más cantidades usando técnicas más complejas (véanse Gardner y Dannenbring (1979)). La superficie de cambio de la figura 11 se derivó de una muestra de 500 productos en un sistema de distribución militar. La coordenada x es el número de pedidos hechos al año, la coordenada y es la inversión pro-

TABLA 19
Cálculo de SY

c_B	Probabilidad de agotamiento de existencias $= \frac{qh}{c_B E(\mathbf{D})}$	$SY = \frac{h}{c_B}$
\$1	$\frac{500(10)}{1(100\,000)} = .05$	$\frac{10}{1} = 10$
\$5	$\frac{500(10)}{5(100\,000)} = .01$	$\frac{10}{5} = 2$
\$10	$\frac{500(10)}{10(100\,000)} = .005$	$\frac{10}{10} = 1$
\$20	$\frac{500(10)}{20(100\,000)} = .0025$	$\frac{10}{20} = 0.50$

TABLA 20
Cálculo de AII

c_B	Punto de reabastecimiento	Nivel promedio de inventario	AII
\$1	200 + 50(1.65) = 282.5	250 + 282.5 − 200 = 332.5	\$33 250
\$5	200 + 50(2.33) = 316.5	250 + 316.5 − 200 = 366.5	\$36 650
\$10	200 + 50(2.58) = 329	250 + 329.5 − 200 = 379	\$37 900
\$20	200 + 50(2.81) = 340.5	250 + 340.5 − 200 = 390.5	\$39 050

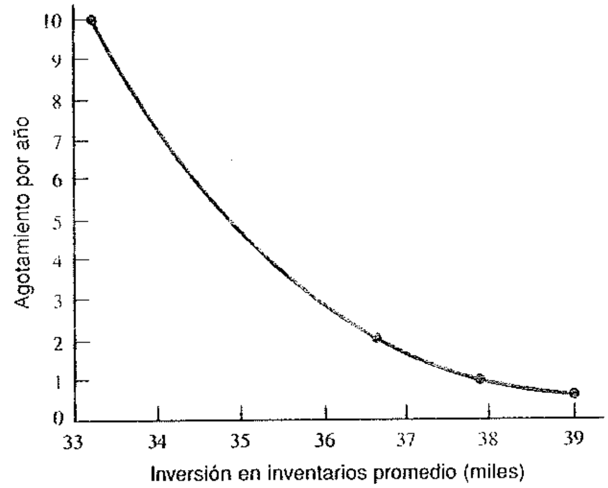


FIGURA 10
Curva de cambio para AII y *SY*

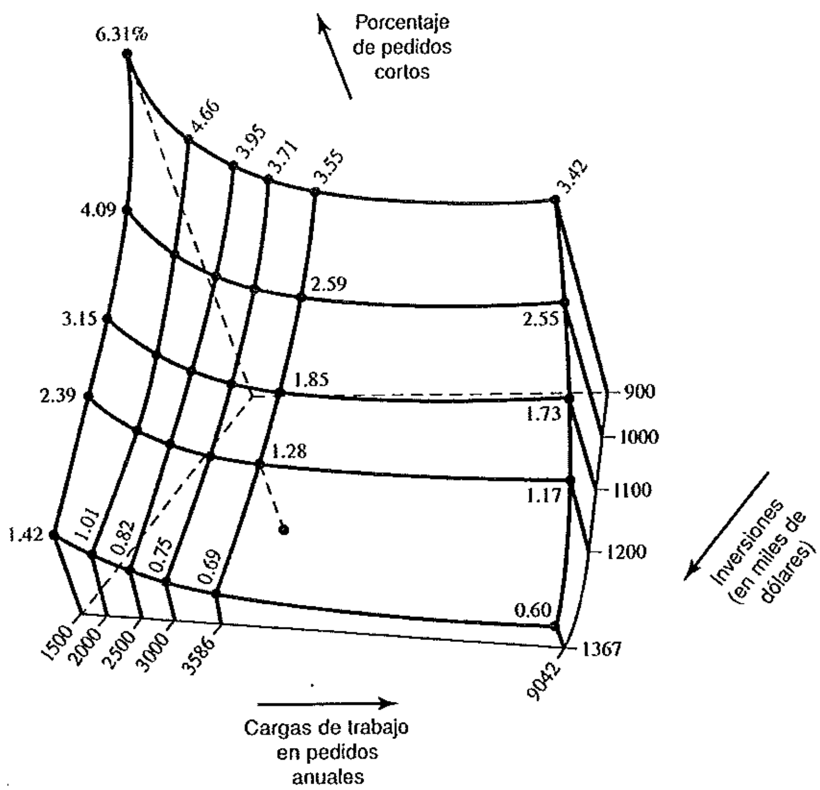


FIGURA 11
Ejemplo de una superficie de cambio†

medio en el inventario (en miles de dólares), y la coordenada z es el porcentaje de solicitudes que generan déficit. Por ejemplo, suponga que la fuerza armada ha fijado una inversión promedio del inventario de 900 000 dólares. Al variar la cantidad de pedidos por año entre 1500 y 9042, la fuerza armada puede variar el porcentaje de solicitudes que generan déficit entre 6.3 y 3.42%. Asimismo, si los pedidos anuales se fijan en 3000, entonces el porcentaje de solicitudes que origina faltantes varía entre 0.75 y 3.71%. Una superficie de cambio facilita la identificación de las transacciones que se dan entre el servicio mejorado, inversión incrementada en el inventario y carga de trabajo incrementado (pedidos por año).

†Reimpreso con permiso de E. Gardner y D. Dannenbring, "Using Optimal Policy Surfaces to Analize Aggregate Inventory Tradeoffs," *Management Science*, Vol. 25, No. 8, agosto 1979. Copyright 1979, the Institute of Management Sciences.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Considere un sistema de inventario para dos productos con los atributos de la tabla 21.

a Trace una curva de cambio para estos productos (utilice AOC y AII como las coordenadas x y y).

b La administración pide, en la actualidad, cada producto dos veces al año. ¿Cómo puede mejorar esta estrategia?

c Los costos por hacer los pedidos corresponden a tiempos de preparación de la maquinaria. El tiempo de máquina se valora en 50 dólares por hora. Si la administración quiere limitar el tiempo de preparación de las máquinas a 500 horas por año, ¿cuáles son las estrategias disponibles?

TABLA 21

	K_i	D_i	c_i
Producto 1	\$500	10 000	\$2000
Producto 2	\$800	20 000	\$250

2 Explique cómo trazar una curva de cambio donde la abscisa es AII y la ordenada es el porcentaje de todas las solicitudes de existencias que da por resultado déficit.

3 Considere la superficie de cambio de la figura 11. La estrategia actual de inventario ha generado 3586 pedidos al año, una AII de 1 367 000 dólares y 0.89% de faltantes.

a Sin cambiar los pedidos por año y la AII, ¿qué tanto pueden mejorar los faltantes?

b Si AII y los faltantes se mantienen en los niveles actuales, ¿qué tanto se pueden reducir los pedidos al año?

c Si los faltantes y los pedidos anuales se mantienen en los niveles presentes, ¿en cuánto se puede reducir la AII?

RESUMEN

Modelos de decisión única

Un analista empieza por elegir un valor q de una variable de decisión. Entonces una variable aleatoria **D** sume un valor d. Por último, se genera un costo $c(d, q)$. El objetivo del que toma las decisiones es escoger q tal que minimice el costo esperado.

Problema del vendedor de periódicos

Si $c(d, q)$ tiene la estructura

$$c(d, q) = c_o q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \le q) \tag{2}$$

$$c(d, q) = -c_u q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \ge q + 1) \tag{2.1}$$

el modelo de decisión de un solo periodo es un **problema del vendedor de periódicos.** Aquí

$$c_o = \text{costo por existencias excesivas por unidad}$$
$$c_u = \text{costo por falta de inventario por unidad}$$

Si **D** es una variable aleatoria discreta, el valor mínimo de q (q^*) que satisface la ecuación siguiente da la decisión óptima

$$F(q^*) \ge \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{3}$$

Si **D** es una variable aleatoria continua, la decisión óptima es el valor de q (q^*) que satisface

$$P(\mathbf{D} \le q^*) = \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{5}$$

Determinación del punto de reabastecimiento y cantidad pedida con demanda incierta: minimización del costo anual esperado

Sean

K = costo por hacer los pedidos

h = costo por almacenamiento/unidad/año

L = plazo de entrega de cada pedido (se supone que se conoce con certeza)

q = cantidad pedida

$\mathbf{D}$ = variable aleatoria que representa la demanda anual, con media $E(\mathbf{D})$, varianza var $\mathbf{D}$ y desviación estándar $\sigma_{\mathbf{D}}$

c_B = costo generado por cada unidad faltante si los déficits se acumulan

c_{LS} = costo (incluyendo ganancias perdidas, clientela perdida) generado por cada venta perdida si cada déficit da por resultado una venta perdida

$\mathbf{X}$ = variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de la entrega

Entonces,

$$E(\mathbf{X}) = LE(\mathbf{D}), \qquad \text{var } \mathbf{X} = L\ (\text{var } \mathbf{D}), \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \sqrt{L}\sigma_{\mathbf{D}}$$

y r es el punto de reabastecimiento, o nivel del inventario en el cual se debe hacer un pedido. Las existencias de seguridad, $r - E(\mathbf{X})$, son la cantidad de inventario mayor que la demanda en el plazo de entrega para cumplir con los faltantes que pudieran ocurrir antes de que llegue el pedido.

Suponga que el valor de la cantidad óptima pedida puede ser razonablemente aproximado mediante la EOQ, $\mathbf{D}$ es una variable aleatoria continua y que todos los déficits se acumulan. Entonces, el costo anual esperado se minimiza mediante q^* y r^* dadas por

$$q^* = \left(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h}\right)^{1/2}$$
$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{c_B E(\mathbf{D})} \tag{13}$$

Suponga que se puede obtener una aproximación razonable de la cantidad óptima pedida mediante EOQ, $\mathbf{D}$ es una variable aleatoria continua y todos los faltantes dan por resultado ventas perdidas. Entonces el costo anual esperado se minimiza con q^* y r^* que satisfagan

$$q^* = \left(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h}\right)^{1/2}$$
$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(\mathbf{D})} \tag{15}$$

Determinación del punto de reabastecimiento: enfoque del nivel de servicio

Puesto que sería difícil determinar el costo exacto de un déficit o de una venta perdida, a menudo es deseable elegir un punto de reabastecimiento que cumpla con un nivel de servicio deseado. Dos medidas comunes del nivel de servicio son

Medida del nivel de servicio 1 SLM_1, la fracción esperada (por lo regular se expresa como porcentaje) de toda la demanda que se cumple a tiempo.

Medida del nivel de servicio 2 SLM_2, número esperado de ciclos al año durante los cuales se presenta un déficit.

Si el plazo de entrega sigue una distribución normal, entonces para un valor deseado de SLM_1, el punto de reabastecimiento r se calcula con

$$NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right) = \frac{q(1 - SLM_1)}{\sigma_{\mathbf{X}}} \tag{18}$$

donde $NL(y)$ es la **función de pérdida normal**, calculada en la tabla 13, y q es la EOQ.

Si la demanda en el plazo de entrega es una variable aleatoria continua, y deseamos que $SLM_2 = s_0$ déficit por año, el punto de reabastecimiento r está dado por

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{s_0 q}{E(\mathbf{D})} \tag{19}$$

Una vez más, q es la EOQ.

Si la demanda en el plazo de entrega es una variable aleatoria discreta, y deseamos que $SLM_2 = s_0$ déficit por año, el punto de reabastecimiento es el valor mínimo de r que satisface

$$P(\mathbf{X} > r) \leq \frac{s_0 q}{E(\mathbf{D})} \tag{19'}$$

Una vez más, q es la EOQ.

Estrategia de revisión periódica (R, S)

Cada R unidades de tiempo revisamos el nivel de inventario y hacemos un pedido para llevar el inventario disponible hasta el nivel S. Dado un valor de R, determinamos el valor de S con

$$P(\mathbf{D}_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{c_B}$$

Clasificación ABC

El 5 a 20% de todos los productos que representa 55 a 65% de las ventas son productos tipo A; el 20 a 30% de todos los productos que explican el 20 a 40% de las ventas son productos tipo B, y el 50 a 75% de todos los productos que representa 5 a 25% de todas las ventas son productos tipo C. Cuando se concentran los esfuerzos en los productos tipo A (y quizá en los tipo B) es posible lograr reducciones en costo notables.

Curvas de cambio

Las curvas de cambio (y las superficies de cambio) se usan para representar las ventajas y desventajas entre distintos objetivos. Por ejemplo, una curva de cambio podría mostrar la transacción entre costos anuales por hacer pedidos y nivel promedio en dólares del inventario. Una curva de cambio es útil para comparar cómo son varias estrategias para hacer pedidos respecto a varios objetivos.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 La tienda de galletas Chocochip hornea sus galletas todas las mañanas antes de abrir. A la tienda le cuesta 15 centavos hornear cada galleta, y cada galleta se vende en 35 centavos. Al final del día, las galletas sobrantes se pueden vender a una panadería no lucrativa a 5 centavos por galleta. La cantidad de galletas que se venden al día se describe mediante la variable aleatoria discreta de la tabla 22.

TABLA 22

Demanda (docenas)	Probabilidad
20	.30
30	.20
40	.20
50	.15
60	.15

TABLA 23

Efectivo necesario	Probabilidad
\$4000	.30
\$5000	.20
\$6000	.10
\$7000	.30
\$8000	.10

a ¿Cuántas docenas de galletas se tienen que hornear antes de abrir la tienda?

b Si la demanda diaria (en docenas) de galletas es $N(50, 400)$, ¿cuántas docenas se tienen que hornear? Se puede encontrar una descripción de $N(\mu, \sigma^2)$ en la sección 1.7.

c Si la demanda diaria (en docenas) de galletas tiene una función de densidad

$$f(d) = \frac{e^{-d/50}}{50} \qquad (d \geq 0)$$

¿cuántas docenas de galletas se deben hornear?

2 Un optometrista pide armazones para lentes a un costo de 40 dólares por armazón y vende cada uno a 70 dólares. El costo anual por almacenarlos es 20% del costo de compra de la armazón. Cada vez que se piden las armazones, se genera un costo de 200 dólares. Debido a la clientela perdida, se incurre en un costo de 50 dólares cada vez que un cliente quiere una armazón que no está en existencia. Las armazones se entregan una semana después de haber hecho el pedido. La demanda anual de armazones es $N(1\,040, 15.73)$.

a Determine la cantidad pedida y el punto de reabastecimiento, suponiendo que todos los faltantes son acumulados.

b En el supuesto de que todos los déficits dan como resultado ventas perdidas, determine la cantidad ordenada y el punto de reabastecimiento.

c Para cumplir con 95% de todos los pedidos a partir de la existencia, ¿cuál debe ser el punto de reabastecimiento?

d Para que los déficits ocurran a un promedio de dos plazos de entrega por año, ¿cuál debe ser el punto de reabastecimiento?

3 Contamos con la información siguiente respecto a un producto:

Costo por hacer un pedido = 100 dólares
Costo del producto = 5 dólares
Precio de venta por producto = 8 dólares
Costo anual por almacenar el producto = 40% del costo del producto
Demanda anual = 5000 unidades
Demanda en el plazo de entrega = $N(20, 900)$

a Si el punto de reabastecimiento que minimiza, el costo esperado es 80, ¿cuál es el costo del déficit? (Suponga acumulación.)

b Si el punto de reabastecimiento que minimiza el costo esperado es 80, ¿cuál es el costo del déficit? (Suponga ventas perdidas).

c ¿Qué punto de reabastecimiento cumpliría con 90% de toda la demanda a tiempo?

d ¿Qué punto de reabastecimiento da por resultado un agotamiento de existencias durante un promedio de 0.5 del plazo de entrega por año?

Grupo B

4 Una compañía opina que el efectivo que necesita durante el mes próximo se describe con la variable aleatoria que se muestra en la tabla 23. Al principio del mes, la compañía tiene 10 000 dólares disponibles, pero el gerente comercial tiene que determinar cuánto del dinero se debe colocar en una cuenta que da 24% de interés anual. Si una parte del dinero se tiene que retirar antes del final del mes, todo el interés sobre el dinero retirado se pierde y se debe pagar una penalización igual al 2% del dinero retirado. ¿Cuánto dinero se debe colocar en la cuenta que da 24% de interés anual?

5 Un comerciante de pieles compra abrigos de piel en 100 dólares cada uno, y vende cada uno a 200 dólares. Opina que la demanda de abrigos es $N(100, 100)$. Los abrigos que sobren se pueden vender a un comercio de rebajas en 100 dólares cada uno, pero el comerciante piensa que debe cargarse a sí mismo un costo de 10 centavos por dólar invertido en un abrigo de piel que se vende con descuento. ¿Cuántos abrigos de piel debe pedir el comerciante? Si el precio al cual el comerciante vendió sus abrigos se incrementó (suponiendo que la demanda no cambia), ¿compraría más abrigos o menos abrigos?

6 Una compañía tiene actualmente dos bodegas. Cada bodega sirve a la mitad de la demanda de la compañía, y la demanda anual atendida por cada bodega es $N(10\,000, 1\,000\,000)$. El plazo de entrega para cumplir con la demanda es $\frac{1}{10}$ del año. La compañía quiere cumplir a tiempo con 95% de toda la demanda. Suponga que la EOQ en cada bodega es de 2000.

a ¿Cuánta existencia de seguridad se debe conservar?

b Demuestre que si la compañía tuviera sólo una bodega, almacenaría menos existencias de seguridad que ahora que tiene dos bodegas.

c Un joven administrador de empresas argumenta: "Puedo disminuir la cantidad total de existencias de seguridad necesarias para cumplir a tiempo con 95% de toda la demanda de los clientes con sólo una bodega central. Por lo tanto, podemos ahorrar dinero teniendo sólo una bodega central en lugar de varias." ¿Cómo se podría refutar este argumento?

7 Utilice LINGO para determinar los valores de q y r que minimizan el costo anual esperado en el ejemplo 5. ¿Qué tan cercana quedó su respuesta a la del libro?

BIBLIOGRAFÍA

Las obras siguientes destacan más las aplicaciones que la teoría:

Brown, R. *Decision Rules for Inventory Management.* Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.

Peterson, R. y E. Silver. *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning.* Nueva York: Wiley, 1998.

Tersine, R. *Principles of Inventory and Materials Management.* Nueva York: North-Holland, 1982.

Vollman, T., W. Berry y C. Whybark. *Manufacturing Planning and Control Systems.* Homewood, Ill.: Irwin, 1997.

En las obras siguientes se encuentran extensos análisis teóricos, así como aplicaciones.

Hadley, G. y T. Whitin. *Analysis of Inventory Systems.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1963.

Hax, A. y D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Johnson, L. y D. Montgomery. *Operations Research in Production, Scheduling; and Inventory Control.* Nueva York: Wiley, 1974.

Barron, H. "Payoff Matrices Pay Off at Hallmark", *Interfaces* 15(no. 4, 1985):20-25.

Bruno, J. "The Use of Monte-Carlo Techniques for Determining the Size of Substitute-Teacher Pools", *Socio-Economic Planning Science* 4(1970):415-428.

Flowers, D. y J. O'Neill. "An Application of Classical Inventory Analysis to a Spare Parts Inventory", *Interfaces* 8(no. 2, 1978):76-79.

Rosenfeld, D. "Optimal Management of Tax-Sheltered Employment Reimbursement Programs", *Interfaces* 16(no. 3, 1986):68-72.

Virts, J. y R. Garrett. "Weighting Risk in Capacity Expansion", *Harvard Business Review* 48(1970).

Véase un estudio sobre curvas y superficie de cambio en:

Gardner, E. y D. Dannenbring. "Using Optimal Policy Surfaces to Analyze Aggregate Inventory Tradeoffs", *Management Science* 25(1979):709-720.