15

Modelos determinísticos de inventario

En este capítulo, comenzamos el estudio formal del modelado de inventario. En capítulos anteriores, se describió cómo se puede usar la programación lineal para resolver ciertos problemas de inventario. El estudio de inventarios continúa en los capítulos 16, 18 y 19.

Se comienza con el análisis de algunos conceptos importantes de modelos de inventario. Luego, se desarrollan versiones del famoso modelo de lote económico de pedido (EOQ, *economic order quantity*) que se puede usar para tomar decisiones de inventario óptimas cuando la demanda es determinística (conocida por adelantado). En los capítulos 16 y 19, se estudian modelos en los que se permite que la demanda sea aleatoria.

15.1 Introducción a los modelos de inventario básicos

Para satisfacer la demanda a tiempo, las compañías suelen tener a la mano las mercancías que esperan vender. El propósito de la teoría de inventarios es determinar las reglas que puede usar la administración para minimizar los costos asociados con mantener el inventario y satisfacer la demanda del cliente. Los modelos de inventario responden las siguientes preguntas. (1) ¿Cuándo se debe hacer un pedido de un producto? (2) ¿Qué tan grande debe ser cada pedido?

Costos relacionados con los modelos de inventario

Los modelos de inventario considerados en este libro tienen que ver con algunos de los costos siguientes o todos.

Costo de pedido y organización

Muchos costos asociados con hacer un pedido o producir un bien internamente, no dependen del tamaño del pedido o la fase de producción. Se hace referencia a estos costos como el *costo de pedido y organización*. Por ejemplo, el costo de pedido incluiría el costo de trabajo administrativo y facturación asociado con un pedido. Si el producto se hace internamente y no se pide a una fuente externa, el costo de mano de obra (y el tiempo de inactividad) para preparar y detener una máquina para una fase de producción se incluiría en el costo de pedido y organización.

Costo de compra unitario

Éste es simplemente el costo variable asociado con la compra de una sola unidad. Por lo común, el costo de compra unitario incluye el costo de mano de obra variable, el costo fijo variable y el costo de materia prima asociado con la compra o producción de una sola unidad. Si los bienes se piden a una fuente externa, el costo de compra unitario debe incluir el costo de envío.

Costo de retención o posesión

Éste es el costo de mantener una unidad de inventario durante un periodo. Si el periodo es un año, el costo de posesión se expresa en dólares por unidad por año. El costo de retención por lo general incluye costo de almacenaje, costo de aseguramiento, impuestos al inventario y el costo debido a la posibilidad de descomposición, robo u obsolescencia. Sin embargo, es común que el componente más importante del costo de posesión es el costo de oportunidad en que se incurre al invertir capital al inventario. Por ejemplo, suponga que una unidad de un producto cuesta 100 dólares y la compañía puede ganar 15% anual en sus inversiones. Entonces mantener una unidad de inventario durante un año le cuesta a la compañía $0.15(100) = \$15$. Cuando las tasas de interés son altas, la mayoría de las empresas suponen que su costo de retención anual es 20 a 40% de su costo de compra unitario.

Costo de escasez o agotamiento de existencias

Cuando un cliente demanda un producto y la demanda no se satisface a tiempo, se dice que ocurre un agotamiento o escasez de existencias. Si los clientes aceptan la entrega en una fecha posterior (sin importar cuánto se retrase), se dice que los pedidos se pueden **posponer.** El caso en el que se permite posponer los pedidos se denomina caso de **pedidos pendientes.** Si ningún cliente acepta la entrega tardía, se tiene el caso de **ventas perdidas.** Por supuesto, la realidad se ubica entre estos dos extremos, pero al determinar las políticas óptimas de inventario para los casos de pedidos pendientes y ventas perdidas, se puede obtener una estimación aproximada de lo que debe ser la política de inventarios óptima.

Muchos costos se relacionan con el agotamiento de existencias. Si se permite que haya pedidos pendientes, la colocación de éstos por lo general da como resultado un costo extra. El agotamiento de existencias a menudo causa que los clientes vayan a otras partes para satisfacer demandas actuales y futuras, lo cual da como resultado ventas perdidas y pérdida de renombre comercial. La escasez de existencias también podría causar que una compañía se quede atrás en otros aspectos de su negocio y podría forzar a una planta a incurrir en mayores costos de producción en tiempo extra. Por lo general, es más difícil medir el costo de agotamiento de existencias que los costos de pedido, compra y retención.

En este capítulo, se estudian varias versiones del modelo clásico de lote económico de pedido (EOQ) que F. W. Harris de Westinghouse Corporation elaboró primero en 1915. Para que sean válidos los modelos de este capítulo, se deben satisfacer ciertas suposiciones.

Suposiciones de modelos EOQ

Pedido repetitivo

La decisión de pedido es repetitiva, en el sentido de que se repite de un modo regular. Por ejemplo, una compañía que está ordenando cojinetes colocará un pedido, luego ve su inventario vacío, entonces hace otro pedido, etcétera. Esto contrasta con los pedidos de una vez. Por ejemplo, cuando un vendedor de periódicos decide cuántos periódicos del domingo pedir, sólo se hará un pedido (por domingo). Los problemas donde un pedido se hace sólo una vez se denominan problemas de inventario de un solo periodo; éstos de analizan en el capítulo 16.

Demanda constante

Se supone que la demanda ocurre a una tasa constante, conocida. Esto implica, por ejemplo, que la demanda ocurre a una tasa de 1000 unidades por año, la demanda durante cualquier periodo de t meses será $\frac{1000t}{12}$.

Plazo de entrega constante

El plazo de entrega de cada pedido es una constante conocida, L. Por **plazo de entrega** se entiende el tiempo transcurrido entre el instante cuando se hace un pedido y el instante en que llega. Por ejemplo, si $L = 3$ meses, entonces cada pedido llegará exactamente tres meses después que se hace el pedido.

Pedidos continuos

Un pedido se puede hacer en cualquier instante. Los modelos de inventario que permiten esto se llaman **modelos de revisión continua**. Si la cantidad de inventario disponible se revisa de manera periódica y los pedidos se pueden hacer sólo cada cierto tiempo, se tiene ante sí un **modelo de revisión periódica**. Por ejemplo, si una empresa revisa su inventario disponible sólo al final de cada mes y decide en este momento si se debe hacer un pedido, se está tratando con un modelo de revisión periódica. Estos modelos se estudian en los capítulos 16, 17 y 18.

Aunque las suposiciones de demanda constante y tiempo de espera constante podrían parecer demasiado restrictivas e irreales, hay muchas situaciones en las que los modelos de este capítulo proporcionan buenas aproximaciones a la realidad. Los modelos en los que la demanda no es determinística se analizan en los capítulos 16 y 19. Los modelos en los que la demanda es determinística pero ocurre a una tasa inconstante ya se revisaron en el estudio de modelos de inventario de PL del capítulo 3 y se amplía su análisis en el capítulo 18.

15.2 Modelo básico de lote económico de pedido

Suposiciones para el modelo básico de EOQ

Para que se cumpla el modelo básico de EOQ, se requieren ciertas suposiciones (por concreción, se supone que la unidad de tiempo es un año):

1 La demanda es determinística y ocurre a una tasa constante.

2 Si se hace un pedido de cualquier tamaño (por ejemplo, q unidades), se incurre en un costo K de pedido y organización.

3 El tiempo de espera de cada pedido es cero.

4 No se permite escasez.

5 El costo por unidad-año de inventario de reserva es h.

Se define D como el número de unidades pedidas por año. Entonces la suposición 1 implica que durante cualquier intervalo de tiempo de t años de duración se pide una cantidad Dt.

El costo de organización K de la suposición 2 es adicional al costo pq de comprar o producir q unidades pedidas. Observe que se está suponiendo que el costo de compra unitario p no depende del tamaño del pedido. Esto excluye muchas situaciones de interés, como descuentos de cantidad para pedidos grandes. En la sección 15.3, se analiza un modelo que permite descuentos de cantidad.

La suposición 3 implica que cada pedido llega tan pronto como se hace. Esta suposición se relaja después en esta sección.

La suposición 4 implica que todos los pedidos se deben cumplir a tiempo; no se permite un estado de inventario negativo. Esta suposición se relaja en la sección 15.5.

La suposición 5 implica que se incurrirá en un costo de mantenimiento de h dólares si durante un año se retiene una unidad, si 2 unidades se retienen durante medio año o si $\frac{1}{4}$ de unidad se mantiene durante cuatro años. En resumen, si I unidades se mantienen durante T años, se incurre en un costo de retención de ITh.

Dadas estas cinco suposiciones, el modelo EOQ determina una política de pedidos que reduce la suma anual de costos de pedido, compra y retención.

Derivación del modelo básico de EOQ

Comenzamos la derivación de la política de pedidos óptima haciendo algunas observaciones simples. Puesto que los pedidos llegan en forma instantánea, nunca se debe hacer un pedido cuando I, el nivel de inventario, es mayor que cero; si se coloca un pedido cuando $I > 0$, se está incurriendo en un costo de retención innecesario. Por otro lado, si $I = 0$, se debe hacer un pedido para evitar que haya escasez. Juntas, estas observaciones muestran que la política que reduce los costos anuales debe hacer un pedido si $I = 0$. En los instantes cuando se hace un pedido, se está enfrentando la misma situación ($I = 0$). Esto significa que cada vez que se hace un pedido, se debe ordenar la misma cantidad. Sea q la cantidad que se pide cada vez que $I = 0$.

Ahora se determina el valor de q que reduce el costo anual (llámela q^*). Sea $TC(q)$ el costo anual en que se incurre si se piden q unidades cada vez que $I = 0$. Observe que

$$TC(q) = \text{costo anual de hacer pedidos} + \text{costo de compra anual} + \text{costo de retención anual}$$

Puesto que cada pedido consta de q unidades, se tendrán que hacer $\frac{D}{q}$ pedidos por año de modo que se satisfaga la demanda anual de D unidades. Por consiguiente

$$\frac{\text{Costo del pedido}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo del pedido}}{\text{pedido}}\right)\left(\frac{\text{pedidos}}{\text{año}}\right) = \frac{KD}{q}$$

Para los valores de q, el costo de compra por unidad es p. Puesto que siempre se compran D unidades por año,

$$\frac{\text{Costo de compra}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de compra}}{\text{unidad}}\right)\left(\frac{\text{unidades compradas}}{\text{año}}\right) = pD$$

Para calcular el costo de retención anual, observe que si se retienen I unidades durante un año, se incurre en un costo de retención de (I unidades)(1 año)(h dólares/unidad/año) = hI dólares.

Suponga que el nivel de inventario no es constante y varía con el tiempo. Si el nivel de inventario promedio durante un tiempo T es $\bar{I}$, el costo de retención para el periodo será $hT\bar{I}$. Esta idea se ilustra en la figura 1. Si se define $I(t)$ como el nivel de inventario en el instante t, entonces durante el intervalo $[0, T]$ el costo de inventario total se determina mediante

$$h(\text{área de 0 a } T \text{ bajo la curva } I(t)) = hT\bar{I}$$

El lector debe comprobar que este resultado se cumple para los dos casos graficados en la figura 1. De manera más formal, $\bar{I}(T)$, el nivel de inventario promedio desde el tiempo 0 hasta el tiempo T, se determina por

$$\bar{I}(t) = \frac{\int_0^T I(t)dt}{T}$$

y el costo de retención total en que se incurre entre el tiempo 0 y el tiempo T es

$$\int_0^T hI(t)dt = hT\bar{I}(T)$$

Para determinar el costo de retención anual, es necesario examinar el comportamiento de I con el tiempo. Suponga que en el instante 0 llegó un pedido de tamaño q. Puesto que la demanda ocurre a una tasa de D por año, tomará $\frac{q}{D}$ años para que el inventario llegue de nuevo a cero. Puesto que la demanda durante cualquier periodo t es Dt, el nivel de inventario en cualquier intervalo de tiempo disminuirá a lo largo de una recta de pendiente $-D$. Cuando el inventario llegue a cero, se hace un pedido de tamaño q y llega al instante, aumentando el nivel de inventario de nuevo a q. Dadas estas observaciones, en la figura 2 se describe el comportamiento de I con el tiempo.

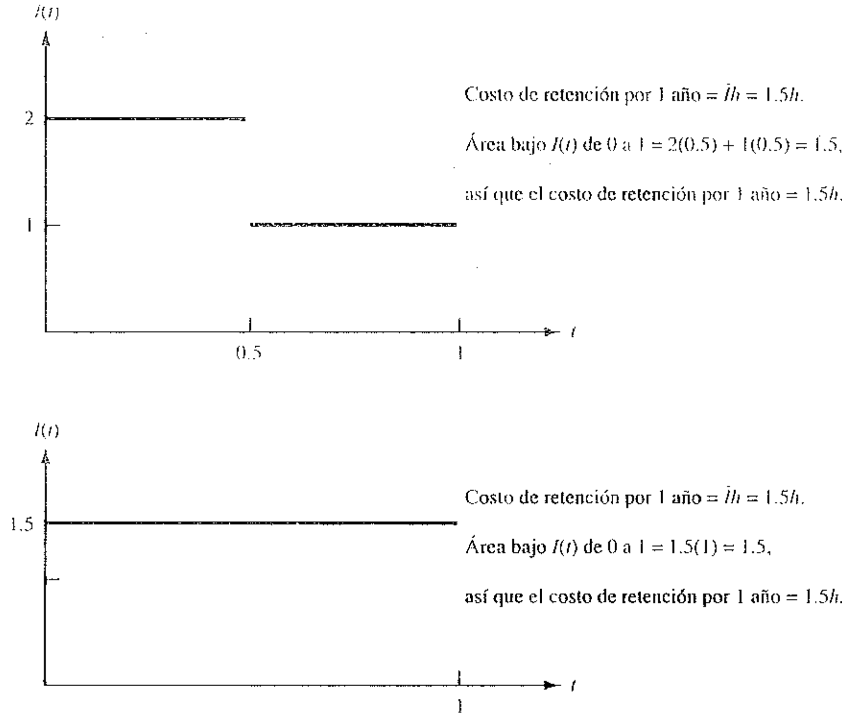


FIGURA 1
Costo de retención y nivel de inventario promedio

Un concepto importante en el estudio de modelos EOQ es la idea de un ciclo.

DEFINICIÓN ■ Cualquier intervalo de tiempo que comienza con la llegada de un pedido y termina un instante antes que se reciba el siguiente pedido se llama **ciclo**. ■

Observe que la figura 2 simplemente consiste en ciclos repetidos de duración $\frac{q}{D}$. Por consiguiente, cada año contendrá

$$\frac{1}{\frac{q}{D}} = \frac{D}{q}$$

ciclos. El inventario promedio durante cualquier ciclo es simplemente la mitad del nivel de inventario máximo obtenido durante el ciclo. Este resultado se cumplirá en cualquier modelo para el que la demanda ocurre a una tasa constante y no se permite el agotamiento de existencias. Así, para nuestro modelo, el nivel de inventario promedio durante un ciclo será de $\frac{q}{2}$ unidades.

Ahora estamos preparados para determinar el costo de retención anual. Se escribe

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de retención}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{año}}\right)$$

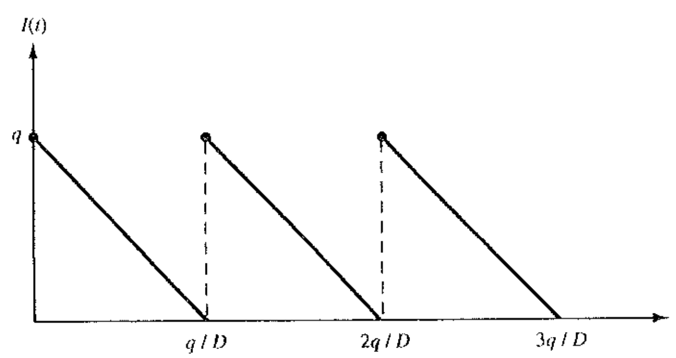


FIGURA 2
Comportamiento de $I(t)$ en el modelo básico de EOQ

Puesto que el nivel de inventario promedio durante cada ciclo es $\frac{q}{2}$ y la duración de cada ciclo es $\frac{q}{D}$,

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Ciclo}} = \frac{q}{2}\left(\frac{q}{D}\right)h = \frac{q^2h}{2D}$$

Entonces

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \frac{q^2h}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{hq}{2}$$

Combinando los costos de pedido, compra y retención, se obtiene

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{hq}{2}$$

Para encontrar el valor de q que minimiza a $TC(q)$, se establece $TC'(q)$ igual a cero. Con esto se obtiene

$$TC'(q) = -\frac{KD}{q^2} + \frac{h}{2} = 0 \tag{1}$$

La ecuación (1) se satisface para $q = \pm(2\,KD/h)^{1/2}$. Puesto que $q = -(2\,KD/h)^{1/2}$ no tiene sentido, esperemos que **el lote económico de pedido**, o EOQ,

$$q^* = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2} \tag{2}$$

minimice a $TC(q)$. Puesto que $TC''(q) = 2KD/q^3 > 0$ para toda $q > 0$, se sabe que $TC(q)$ es una función convexa. Entonces el teorema 1′ del capítulo 11 implica que cualquier punto donde $TC'(q) = 0$ minimizará a $TC(q)$. Así, q^* minimiza en realidad el costo total anual.

OBSERVACIONES

1 La EOQ no depende del precio de compra unitario p, debido a que el tamaño de cada pedido no cambia el costo de compra unitario. Por consiguiente, el costo de compra anual depende de q. En la sección 15.3, se estudian modelos en los que el tamaño del pedido cambia el costo de compra unitario.
2 Puesto que cada pedido consta de q^* unidades, se deben pedir al año un total de $\frac{D}{q^*}$ unidades.
3 Para ver si la fórmula de la EOQ es razonable, véase cómo al cambiar ciertos parámetros cambia q^*. Por ejemplo, cuando K aumenta, se esperaría que disminuyera el número de pedidos anuales, $\frac{D}{q^*}$. De manera equivalente, se esperaría un incremento en K para incrementar q^*. Un vistazo a la ecuación (2) deja ver que en realidad éste es el caso. De manera análoga, un incremento en h hace que sea más costoso mantener el inventario, así que se esperaría un incremento en h para reducir el nivel de inventario promedio, $\frac{q^*}{2}$. En la ecuación (2) se observa que un incremento en h reduce a q^*; también se observa que la relación entre el costo de pedidos y el costo de retención es el factor crítico para determinar q^*. Por ejemplo, si se duplican K y h, q^* permanece sin cambio. También observe que q^* es proporcional a $D^{1/2}$. Por lo tanto, al cuadruplicar la demanda q^* sólo aumenta el doble.
4 No es difícil demostrar que si se ordena la EOQ, entonces

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \frac{\text{costo de retención}}{\text{año}} \tag{3}$$

Para demostrar esto, observe que

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \frac{hq^*}{2} = \frac{h}{2}\left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2} = \left(\frac{KDh}{2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\text{Costo de pedido}}{\text{Año}} = \frac{KD}{q^*} = \frac{KD}{\left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}} = \left(\frac{KDh}{2}\right)^{1/2}$$

En la figura 3 se ilustran las ventajas y desventajas entre el costo de retención y el costo de pedido. En la figura se confirma el hecho de que en q^*, los costos de retención y de pedido son los mismos.

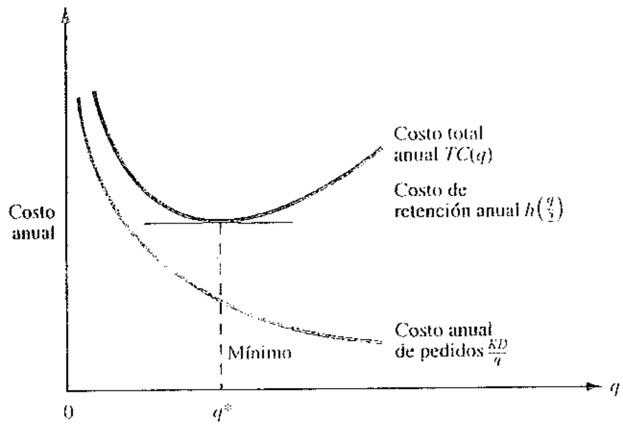


FIGURA 3
Ventajas y desventajas entre el costo de retención y el costo de pedido

Con el siguiente ejemplo se ilustra el uso de la fórmula para la EOQ.

EJEMPLO 1 Braneast Airlines

Braneast Airlines utiliza 500 luces traseras por año. Cada vez que se hace un pedido de luces traseras, se incurre en un costo de 5 dólares. Cada luz cuesta 40¢ y el costo de retención es de 8¢/luz/año. Suponga que la demanda ocurre a una tasa constante y no se permite que haya escasez. ¿Cuál es la EOQ? ¿Cuántos pedidos se harán este año? ¿Cuánto tiempo transcurrirá entre la colocación de los pedidos?

Solución Se tiene que $K = \$5$, $h = \$0.08$/luz/año, y $D = 500$ luces/año. La EOQ es

$$q^* = \left(\frac{2(5)(500)}{0.08}\right)^{1/2} = 250$$

Por consiguiente, la aerolínea debe hacer un pedido de 250 luces traseras cada vez que el inventario llega a cero.

$$\frac{\text{Pedidos}}{\text{Año}} = \frac{D}{q^*} = \frac{500}{250} = \frac{2\text{ pedidos}}{\text{Año}}$$

El tiempo entre la colocación de pedidos (o llegada) es simplemente la duración de un ciclo. Puesto que la duración de cada ciclo es $\frac{q^*}{D}$, el tiempo entre pedidos será

$$\frac{q^*}{D} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}\text{ año}$$

Sensibilidad del costo total a variaciones pequeñas en la cantidad de pedido

En muchas situaciones, una ligera desviación con respecto a la EOQ da como resultado un ligero incremento en los costos. Para el ejemplo 1, veamos cómo las desviaciones de la EOQ cambian el costo anual total. Puesto que la cantidad de pedido no afecta el costo de compra anual, se centra la atención en cómo los cambios en la cantidad de pedido afectan los costos de retención y pedido. Sea

$HC(q)$ = costo de retención anual si la cantidad de pedido es q

$OC(q)$ = costo de pedido anual si la cantidad de pedido es q

TABLA 1
Cálculos de costo para la figura 4

q	$HC(q)$	$OC(q)$	$HC(q) + OC(q)$
50	2.0	50.00	52.00
100	4.0	25.00	29.00
150	6.0	16.67	22.67
200	8.0	12.50	20.50
220	8.8	11.36	20.16
240	9.6	10.42	20.02
250	10.0	10.00	20.00
260	10.4	9.62	20.02
280	11.2	8.93	20.13
300	12.0	8.33	20.33
350	14.0	7.14	21.14
400	16.0	6.25	22.25

Se encuentra que

$$HC(q) = \tfrac{1}{2}(0.08q) = 0.04q \qquad OC(q) = 5\left(\frac{500}{q}\right) = \frac{2\,500}{q}$$

Usando la información de la tabla 1, se obtiene el diagrama de $HC(q) + OC(q)$ dado en la figura 4. En la figura se observa que $HC(q) + OC(q)$ es muy plana cerca de q^*. Por ejemplo, pedir 20% más que la EOQ ($q = 300$) hace que $HC(q) + OC(q)$ aumente de 20 a 20.33 (un incremento menor de 2%).

La parte plana de la curva $HC(q) + OC(q)$ es importante, debido que a menudo es difícil estimar h y K. La estimación inexacta de h y K podría dar como resultado un valor de q que difiere un poco de la EOQ real. La parte plana de la curva de $HC(q) + OC(q)$ indica que incluso un error moderado en la determinación de la EOQ sólo incrementará los costos en una cantidad pequeña.

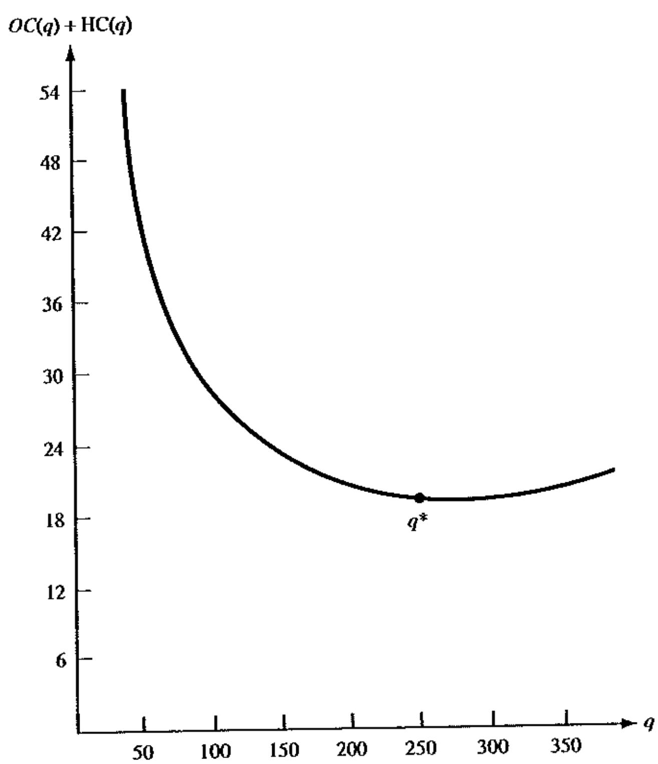


FIGURA 4
$OC(q) + HC(q)$ para el ejemplo de Braneast

Determinación de la EOQ cuando el costo de retención se expresa en términos del valor del inventario en dólares

A menudo, el costo de retención anual se expresa en términos del costo de retener un valor de inventario equivalente a un dólar durante un año. Entonces el costo de retener una unidad de inventario durante un año será ph_d, y (2) se podría escribir como

$$q^* = \left(\frac{2KD}{ph_d}\right)^{1/2} \tag{4}$$

EJEMPLO 2 Pedido de cámaras

Una tienda de departamentos vende 10 000 cámaras por año. La tienda pide las cámaras a un almacén regional. Cada vez que se hace un pedido, se incurre en un costo de 5 dólares. El almacén paga 100 dólares por cada cámara, y el costo de retener un valor de inventario de 1 dólar durante un año se estima como el costo de oportunidad de capital anual de 20¢. Determine la EOQ.

Solución Se tiene que $K = \$5$, $D = 10\ 000$ cámaras por año, $h_d = 20$¢/dólar/año, y $p = 100$ dólares por cámara. Entonces

$$q^* = \left(\frac{2(5)(10\ 000)}{(100)(0.20)}\right)^{1/2} = (5\ 000)^{1/2} = 70.71 \text{ cámaras}$$

Por consiguiente, la EOQ recomienda que el almacén ordene 70.71 cámaras cada vez que el nivel del inventario llega a cero. Por supuesto, el número de cámaras pedidas debe ser un entero. Puesto que $TC(q)$ es una función convexa de q, ya sea $q = 70$ o $q = 71$ debe minimizar $TC(q)$. (Si esto al parecer es difícil de creer, considere la figura 4.) Como resultado de la horizontalidad de la curva $HC(q) + OC(q)$, en realidad no importa si el almacén elige pedir 70 o 71 cámaras.

Efecto de un plazo de entrega distinto de cero

Ahora se permite que el plazo de entrega L sea mayor que cero. La introducción de un plazo de espera distinto de cero deja sin cambio los costos anuales de retención y pedido. Por consiguiente, la EOQ minimiza todavía los costos totales. Para evitar que haya escasez y reducir el costo de retención, cada pedido se debe hacer a un nivel de inventario que asegure que cuando llega cada pedido, el nivel de inventario sea igual a cero.

DEFINICIÓN ■ El nivel de inventario al que se debe hacer un pedido es el **punto de reposición.** ■

Para determinar el punto de reposición para el modelo básico de EOQ, es necesario considerar dos casos.

Caso 1

La demanda durante el plazo de entrega no excede la EOQ. (Esto significa que $LD \leq$ EOQ.) En este caso, el punto de reposición ocurre cuando el nivel de inventario es igual a LD. Entonces el pedido llegará L unidades de tiempo después, y al llegar el pedido, el nivel de inventario será igual a $LD - LD = 0$. En el ejemplo 1, suponga que un envío de luces traseras tarda un mes en llegar. Entonces $L = \frac{1}{12}$ año, y el punto de reposición de Braneast será $(\frac{1}{12})(500) = 41.67$ luces traseras. Así, siempre que Braneast tenga 41.67 luces traseras disponibles, se debe hacer un pedido por más luces traseras.

Caso 2

La demanda durante el plazo de entrega (LD) excede a la EOQ. (Esto significa que $LD >$ EOQ.) En este caso, el punto de reabastecimiento no es igual a LD. Suponga que en el ejemplo 1, $L = 15$ meses. Entonces $LD = (15/12)500 = 625$ luces traseras. ¿Por qué no se puede hacer un pedido cada vez que el nivel de inventario llega a 625 luces? Puesto que la EOQ = 250, el nivel de inventario nunca llegará a 625. Para determinar el punto correcto de reabastecimiento, observe que los pedidos se hacen cada 6 meses. Suponga que un pedido llegó en el tiempo 0. Entonces se debió hacer un pedido hace $L = 15$ meses (en $T = -15$ meses). Puesto que los pedidos llegan cada seis meses, los pedidos se deben hacer en $T = -9$ meses, $T = -3$ meses, $T = 3$ meses, etcétera. Puesto que en $T = 0$ sólo ha llegado un pedido, el nivel de inventario en $T = 0$ es 250. Entonces en $T = 3$ (o cualquier otro punto en que se hace un pedido), el nivel de inventario será igual a $250 - (3/12)(500) = 125$. Así, el punto de reabastecimiento es 125 luces traseras.

En general (véase el problema 15), se puede demostrar que el punto de reabastecimiento es igual al residuo cuando LD se divide entre la EOQ. Así, en el ejemplo, el punto de reabastecimiento es el residuo cuando 625 se divide entre 250. Esto de nuevo produce un punto de reabastecimiento de 125 luces traseras.

La determinación del punto de reabastecimiento se vuelve muy importante cuando la demanda es aleatoria y puede haber agotamiento de inventario. En las secciones 16.6 y 16.7, se analiza el problema de determinar el punto de reabastecimiento cuando la demanda es aleatoria.

Esta sección se termina con un ejemplo de problema de no inventario que se puede resolver con el razonamiento que se utilizó para obtener la EOQ.

EJEMPLO 3 Servicio de autobús

Cada hora, D estudiantes quieren hacer un viaje en autobús de la unión de estudiantes a Fraternity Row. La administración asigna un valor de h dólares por cada hora que un estudiante está obligado a esperar un autobús. A la universidad le cuesta K dólares enviar un autobús de la unión de estudiantes a Fraternity Row. Suponiendo que la demanda ocurre a una tasa constante, ¿cuántos autobuses se deberán enviar cada hora desde la unión de estudiantes a Fraternity Row?

Solución Observe que

$$\frac{\text{Costo total}}{\text{Hora}} = \frac{\text{costo de enviar autobuses}}{\text{hora}} + \frac{\text{costo de esperar al estudiante}}{\text{hora}}$$

Puesto que la demanda ocurre a una tasa constante, los autobuses deben salir a intervalos regulares. Esto significa que cada autobús que llega a la unión de estudiantes encontrará el mismo número de estudiantes esperando. Sea q = número de estudiantes presentes cuando llega cada autobús. Suponiendo que un autobús llegó en el tiempo 0, el "número de estudiantes esperando" presenta el comportamiento mostrado en la figura 5. Entonces

$$\frac{\text{Costo de enviar autobuses}}{\text{Hora}} = \left(\frac{K \text{ dólares}}{\text{autobús}}\right)\left(\frac{\frac{D}{q}\text{autobuses}}{\text{hora}}\right) = \frac{\frac{KD}{q}\text{ dólares}}{\text{hora}}$$

De la figura 5, el número promedio de estudiantes esperando es $\frac{q}{2}$. Entonces

$$\frac{\text{Costo de esperar a los estudiantes}}{\text{Hora}} = \left(\frac{q}{2}\text{ estudiantes}\right)\left(\frac{h \text{ dólares/estudiante}}{\text{hora}}\right) = \frac{\frac{hq}{2}\text{ dólares}}{\text{hora}}$$

Estos cálculos demuestran que

$$\frac{\text{Costo total}}{\text{Hora}} = \frac{hq}{2} + \frac{KD}{q}$$

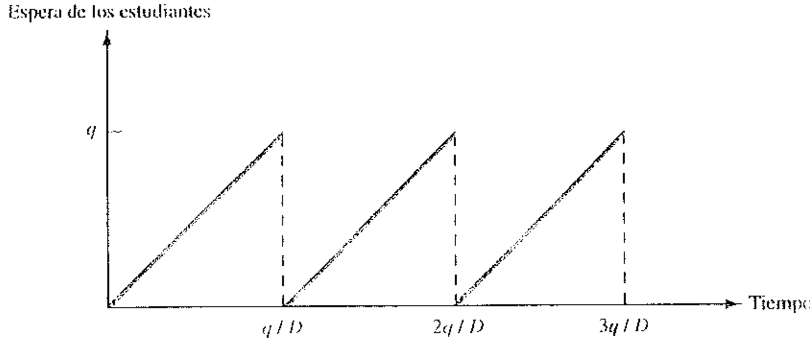


FIGURA 5
Evolución con el tiempo de la espera de los estudiantes (ejemplo 3)

Esto es idéntico a $HC(q) + OC(q)$ para el modelo EOQ básico. Por consiguiente, el valor óptimo de q para el problema de transportar en autobús es simplemente la EOQ. Esto significa que el valor óptimo de q es $q^* = (\frac{2KD}{h})^{1/2}$. Puesto que cada autobús recoge q^* estudiantes, se debe enviar $\frac{q^*}{D}$ autobuses cada hora. De la figura 5, se ve que el tiempo entre autobuses será $\frac{D}{q^*}$ horas. Por ejemplo, si h = \$5/estudiante/hora, D = 100 estudiantes/hora, y K = \$10/autobús, se encuentra que

$$q^* = \left(\frac{2(10)(100)}{5}\right)^{1/2} = 20$$

Entonces $\frac{100}{20} = 5$ autobuses/hora saldrán de la unión de estudiantes, y un autobús saldrá de la unión de estudiantes cada $\frac{1}{5}$ hora = 12 minutos.

Plantilla de hoja de cálculo para el modelo básico de EOQ

En la figura 6 (archivo EOQ.xls) se ilustra una plantilla de Excel para el modelo básico de EOQ. El usuario introduce los valores de K, h (digamos, por año), el tiempo de espera (L), y D (de nuevo, por año). A la celda A5 se le asignó el nombre de intervalo K; la celda B5, H; la celda C5, D, y la celda A11, L. En A8, la EOQ se determina por la fórmula (2*K*D/H)^.5. En B8, se calculan los costos anuales de retención con la fórmula .5* A8*H. En D5, se calculan los pedidos por año para la EOQ con la fórmula = D/A8. En C8, se calculan los costos de pedido anuales para la EOQ con la fórmula K*D5. En D8, se calcula el costo anual total para la EOQ con la fórmula =B8+C8. En B11, se calcula el punto de reabastecimiento con la fórmula =**MOD**(L*D,A8). Esto produce el residuo obtenido cuando se divide L*D entre la EOQ. En la figura 6, se introdujeron los valores de datos para el ejemplo 1.

A	A	B	C	D
1	MODELO			
2	SIMPLE DE			
3	LA EOQ			
4	K	h	D	PEDIDOS/AÑO
5	5	0.08	500	2
6				
7	EOQ	COSTOS DE RETENCIÓN	COSTOS DE PEDIDO	COSTO TOTAL
8	250	10	10	20
9				
10	PLAZO DE ENTREGA	PUNTO DE REABASTECIMIENTO		
11	1.25	125		

FIGURA 6
Modelo simple de la EOQ

Políticas de pedido de potencia de dos

Suponga que una compañía pide tres productos, y las EOQ para cada producto producen tiempos entre pedidos de 3.5 días, 5.6 días y 9.2 días. Rara vez los pedidos para diferentes productos llegarían el mismo día. Si de alguna manera se pudieran sincronizar los intervalos de reabastecimiento de modo que los pedidos para diferentes productos llegaran el mismo día, se podrían reducir en gran medida los costos de coordinación. Por ejemplo, serían necesarios muchos menos camiones para entregar los pedidos si se pudiera sincronizar su llegada. Roundy (1985) diseñó un método refinado pero simple llamado **Políticas de pedido de potencia de dos** para asegurar que los pedidos para varios productos estén bien sincronizados. Sea $q^* = $ EOQ. Entonces el intervalo de reabastecimiento óptimo para un producto es $t^* = q^*/D$ Se supone que t^* es por lo menos 1 día. Entonces para alguna $m \geq 0$, se debe cumplir que $2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$. Si $t^* \leq \sqrt{2} * 2^m$, se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^m. Si $t^* \geq \sqrt{2} * 2^m$, se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^{m+1}. Roundy demostró que usar este método (llamado política de *potencia de dos*) para redondear el intervalo de reabastecimiento a una potencia cercana a 2 incrementa la suma de los costos fijos y de retención a lo sumo 6%. La ventaja de una política de potencia de dos es que productos diferentes frecuentemente llegarán al mismo tiempo. En muchas circunstancias, esto reducirá en gran medida los costos de coordinación. Por ejemplo, considere los tres pedidos con intervalos de reabastecimiento de 3.5 días, 5.6 días y 9.2 días. La política de potencia de dos de Roundy elegiría pedir cantidades que corresponden a periodos de reabastecimiento de 4, 4 y 8 días, respectivamente. Así, los productos 1 y 2 llegarían siempre juntos; la mitad del tiempo, el producto 3 llega con el producto 2. En la mayoría de las circunstancias, esta política reducirá los costos de coordinación por más del incremento máximo posible de 6% en el costo total. A continuación se da una demostración del resultado de Roundy.

Para empezar, elija una cantidad de pedido arbitraria q' y defina el costo total para esta cantidad de pedidos por

$$TC(q') = \frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}$$

Entonces

$$\frac{TC(q')}{TC(q^*)} = \frac{\frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}}{\sqrt{2KhD}} = \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KDh}} + \frac{1}{q'}\sqrt{\frac{K^2D^2}{2KDh}}$$
$$= \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h}{2KD}} + \frac{1}{2q'}\sqrt{\frac{2KD}{h}}$$
$$= \frac{q'}{2q^*} + \frac{q^*}{2q'}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{q^*} + \frac{q^*}{q'}\right)$$

Puesto que $t^* = \dfrac{q^*}{D}$ y $t' = \dfrac{q'}{D}$, se encuentra que

$$\frac{TC(t')}{TC(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t'}{t^*} + \frac{t^*}{t'}\right) \tag{5}$$

Ahora ya se puede demostrar el resultado de Roundy. Se supone que t^* es por lo menos 1 día. Entonces para algún entero no negativo m, $2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$.

TEOREMA 1

Si $t^* \leq 2^m(\sqrt{2})$, entonces la política de pedidos de costo mínimo de potencia de dos es $t = 2^m$. Si $t^* \geq 2^m(\sqrt{2})$, entonces la política de pedido de costo mínimo de potencia de dos es 2^{m+1}.

En cualquier caso, el costo total de la política de pedidos óptima de potencia de dos nunca será más de 6% mayor que el costo total de la EOQ.

Demostración Puesto que $TC''(q) > 0$, se sabe que $TC(q)$ es una función convexa de q. La convexidad de $TC(q)$ implica que el intervalo de tiempo de reabastecimiento óptimo de potencia de dos es 2^m o 2^{m+1}. De (5), 2^m será el intervalo de tiempo de reabastecimiento óptimo de potencia de dos si y sólo si

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2^m}{t^*}+\frac{t^*}{2^m}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2^{m+1}}{t^*}+\frac{t^*}{2^{m+1}}\right) \tag{6}$$

La desigualdad (6) se cumplirá si y sólo si

$$\frac{t^*}{2^{m+1}} \le \frac{2^m}{t^*}$$

o $t^* \le \sqrt{2}(2^m)$. Hemos demostrado que si $t^* \le 2^m(\sqrt{2})$, entonces la política de pedidos de potencia de dos de costo mínimo es establecer $t = 2^m$. Si $t^* \ge 2^m\,(\sqrt{2})$, entonces la política de pedidos de potencia de dos de costo mínimo es 2^{m+1}. Este resultado muestra que la política de pedidos óptima de potencia de dos debe elegir un tiempo de reabastecimiento en el intervalo $\left[\frac{t^*}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}t^*\right]$.

De (5), se encuentra ahora que la discrepancia máxima entre el costo total para la política de pedidos de potencia de dos y el costo total para t^* ocurrirá si el intervalo de reabastecimiento de potencia de dos es igual a $\sqrt{2}t^*$ o $\frac{t^*}{\sqrt{2}}$. En cualquier caso,

$$\frac{TC\left(\sqrt{2}t^* \text{ o } \frac{t^*}{\sqrt{2}}\right)}{TC(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right) = 1.06$$

Así, una política de potencia de dos no puede causar un incremento en el costo total de más de 6%.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Cada mes, una gasolinera vende 4000 galones de gasolina. Cada vez que la compañía madre rellena los tanques de la estación, le cobra a la gasolinera 50 dólares más 70¢ por galón. El costo anual de retener un galón de gasolina es 30¢.

a ¿Qué tan grandes deben ser los pedidos de la gasolinera?

b ¿Cuántos pedidos por año se harán?

c ¿Cuánto transcurrirá entre pedidos?

d ¿Se cumplirán las suposiciones de la EOQ en esta situación? ¿Por qué sí o por qué no?

e Si el plazo de entrega es de dos semanas, ¿cuál es el punto de reabastecimiento? Si el plazo de entrega es de 10 semanas, ¿cuál es el punto de reabastecimiento? Suponga que 1 semana = $\frac{1}{52}$ de año.

2[†] El dinero en mi cuenta de ahorros obtiene un interés a una tasa anual de 10%. Cada vez que voy al banco me tardo 15 minutos en la fila. Mi tiempo vale 10 dólares por hora. Durante cada año, necesito retirar 10 000 dólares para saldar mis cuentas.

a ¿Con qué frecuencia debo ir al banco?

b Cada vez que voy al banco, ¿cuánto dinero debo retirar?

c Si mis necesidades de efectivo aumentan, ¿iré al banco con más o menos frecuencia?

d Si suben las tasas de interés, ¿iré al banco más o menos veces?

e Si el banco pone más cajeros, ¿iré al banco con más o menos frecuencia?

3[‡] Father Dominic's Pizza Parlor recibe 30 llamadas por hora para entrega de pizzas. A Father Dominic's le cuesta 10 dólares enviar una camioneta a entregar pizzas. Se estima que cada minuto que un cliente pasa esperando una pizza le cuesta a Pizza Parlor 20¢ de los negocios futuros perdidos.

a ¿Con qué frecuencia Father Dominic's debe enviar una camioneta?

b ¿Cuál sería la respuesta si una camioneta sólo puede llevar cinco pizzas?

[†]Basado en Baumol (1952).

[‡]Basado en Ignall y Kolesar (1972).

4 La eficacia de un sistema de inventario suele medirse por el **índice de rotación.** El índice de rotación (IR) se define por

$$IR = \frac{\text{Costo de bienes vendidos durante un año}}{\text{Valor promedio de inventario disponible}}$$

a ¿Un índice de rotación alto indica un sistema de inventario eficaz?

b Si está siendo utilizado el modelo EOQ, determine IR en términos de K, D, h y q.

c Suponga que se incrementa D. Demuestre que también se incrementará el IR.

5 Suponga que pedimos tres tipos de aparatos para el almacén Ohm City. Los intervalos óptimos de reabastecimiento son 9.2 días, 21.2 días y 38.1 días. ¿Cuál sería la política de pedidos óptima de potencia de dos?

6 Suponga que pedimos tres tipos de ropa para Ceiling Mart. Los intervalos de reabastecimiento óptimos son 92 días, 21 días y 60 días. ¿Cuál sería la política de pedidos óptima de potencia de dos?

Grupo B

7 Suponga que estamos pidiendo chips de computadora. Suponga que en cada pedido, exactamente 10% de los chips están defectuosos. Tan pronto como llega el pedido, se encuentra cuáles chips están defectuosos y se devuelven a cambio de un reembolso completo. En este caso, ¿cuál sería la política óptima de pedidos?

8 Demuestre que para $q \leq q^*$, un tamaño de pedido de $q + q^*$ tendrá un costo menor que un tamaño de pedido $q - q^*$. ¿Cuál es el significado administrativo de este resultado?

9 Suponga que en vez de pedir la EOQ q^*, se usa la cantidad de pedido $0.8q^*$. Utilice la ecuación (3) para mostrar que $HC(q) + OC(q)$ se incrementará en 2.50%.

10 En términos de K, D y h, ¿cuál es el tiempo promedio que un artículo pasa en inventario antes de ser utilizado para satisfacer la demanda? Explique cómo se puede usar este resultado para caracterizar un artículo de movimiento lento o rápido.

11 Una farmacia vende 30 frascos de antibióticos por semana. Cada vez que pide antibióticos, hay un costo fijo de pedidos de 10 dólares y un costo de \$10/frasco. Suponga que el costo de retención anual es 20% del costo de un frasco de antibióticos, y suponga que los antibióticos se echan a perder y no se pueden vender si pasan más de una semana en inventario. Cuando la farmacia hace un pedido, ¿cuántos frascos de antibiótico debe pedir?

12 Durante cada año, CSL Computer Company necesita capacitar 27 representantes de servicio. Sin importar a cuántos estudiantes se capacite, cuesta \$12 000 ejecutar un programa de capacitación. Puesto que los representantes de servicio ganan un salario mensual de \$1500, CSL no quiere capacitarlos antes que sea necesario. Cada sesión de capacitación toma un mes.

a Exprese las suposiciones necesarias para que sea aplicable el modelo EOQ.

b ¿Cuántos representantes de servicio debe haber en cada grupo de capacitación?

c ¿Cuántos programas de capacitación debe emprender CSL cada año?

d ¿Cuántos representantes de servicio capacitados estarán disponibles cuando comience cada programa de capacitación?

13 Un periódico tiene 500 000 suscriptores que pagan 4 dólares por mes por el periódico. A la compañía le cuesta 200 000 dólares facturar a todos sus clientes. Suponga que la compañía puede ganar intereses a una tasa de 20% por año en los ingresos. Determine con qué frecuencia el periódico debe facturar a sus clientes. (*Sugerencia*: considere las suscripciones no pagadas como el bien inventariado.)

14 Considere una empresa que sabe que el precio del producto que está pidiendo se va a incrementar de forma permanente en \$$X$. ¿Cuánto del producto se debe pedir antes a que se ponga en práctica el incremento de precio?

Una forma de abordar esta pregunta es suponer que la empresa pide Q unidades antes de que se ponga en práctica el incremento del precio.

a ¿En qué costo de retención extra se incurre al ordenar ahora Q unidades?

b ¿Cuánto se ahorra en costos de compra al ordenar ahora Q unidades?

c ¿Qué valor de Q maximiza los ahorros de costo de compra menos los costos de retención extra?

d Suponga que la demanda anual es de 1000 unidades, el costo de retención unidad-año es de \$7.50 y el precio del artículo se va a incrementar en \$10. ¿Qué tan grande se debe hacer el pedido antes que se ponga en práctica el incremento de precio?

15 Demuestre que el punto de reabastecimiento en el modelo EOQ es igual a residuo cuando se divide LD entre la EOQ.

16 El municipio de Staten Island tiene dos "distritos de saneamiento". En el distrito 1, la basura de las calles se amontona a una tasa promedio de 2000 toneladas por semana, y en el distrito 2 a una tasa promedio de 1000 toneladas por semana. Cada distrito tiene 500 millas de calles. Staten Island tiene 10 cuadrillas de saneamiento y cada una puede limpiar 50 millas por semana de calles. Para minimizar el nivel promedio de la cantidad total de basura de las calles en los dos distritos, ¿con qué frecuencia se debe limpiar cada distrito? Suponga que la basura en un distrito aumenta a una tasa constante hasta que se recoge (suponga que la recolección de basura es instantánea). (*Sugerencia*: sea p_i igual al número promedio de veces que se limpia cada distrito por semana. Entonces $p_1 + p_2 = 1$.)†

†Basado en Riccio, Miller, y Little (1986).

15.3 Cálculo de la cantidad óptima de pedido cuando se permiten descuentos de cantidad

Hasta ahora, se ha supuesto que el costo de compra anual no depende del tamaño del pedido. En la sección 15.2, esta suposición nos permitió ignorar el costo de compra anual cuando se calculó la cantidad de pedido que minimiza el costo total anual. No obstante, en la vida real, los proveedores suelen reducir el precio de compra unitario para pedidos grandes. Estas reducciones de precio se conocen como *descuentos de cantidad*. Si un proveedor da descuentos de cantidad, el costo de compra anual dependerá del tamaño del pedido. Si el costo de retención se expresa como porcentaje del costo de compra de un artículo, el costo de retención anual también dependerá del tamaño del pedido. Puesto que el costo de compra anual ahora depende del tamaño del pedido, ya no se puede ignorar el costo de compra en tanto se intercambian el costo de retención y el costo de preparación. Así, el método utilizado en la sección 15.2 para encontrar la cantidad óptima ya no es válido, y se requiere un nuevo método.

Sea q la cantidad pedida cada vez que se hace un pedido, el modelo general de descuento de cantidad analizado en esta sección se podría describir como sigue:

Si $q < b_1$, cada artículo cuesta p_1 dólares.

Si $b_1 \leq q < b_2$, cada artículo cuesta p_2 dólares.

Si $b_{k-2} \leq q < b_{k-1}$, cada artículo cuesta p_{k-1} dólares.

Si $b_{k-1} \leq q < b_k = \infty$, cada artículo cuesta p_k dólares.

Puesto que $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ son puntos donde ocurre un cambio de precio (o baja brusca y pronunciada de precios), se dice que $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ son los **puntos de reducción pronunciada de precios**. Puesto que las cantidades de pedido mayores se deben asociar con precios menores, se tiene que $p_k < p_{k-1} < \cdots < p_2 < p_1$. El modelo descuento de cantidad se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Compra de discos

Una empresa local de contabilidad en Smalltown pide cajas de discos flexibles (10 discos por caja) a un almacén en Megalópolis. El precio por caja que cobra el almacén depende del número de cajas compradas (véase la tabla 2). La empresa de contabilidad utiliza 10 000 discos flexibles por año. Se supone que el costo de un pedido son 100 dólares. El único costo de retención es el costo de oportunidad del capital, que se supone es 20% por año. Para este ejemplo, $b_1 = 100$, $b_2 = 300$, $p_1 = \$50.00$, $p_2 = \$49.00$ y $p_3 = \$48.50$.

Este ejemplo continúa después en esta sección.

TABLA 2
Costos de compra para discos

Número de cajas pedidas (q)	Precio por caja
$0 \leq q < 100$	\$50.00
$100 \leq q < 300$	\$49.00
$q \geq 300$	\$48.50

Antes de explicar cómo hallar la cantidad de pedido que minimiza los costos anuales totales, se necesitan las definiciones siguientes.

1 $TC_i(q)$ = costo anual total (que incluye costos de retención, compra y formulación de pedido) si cada pedido es por q unidades a un precio p_i.

2 EOQ_i = cantidad que minimiza el costo total anual, si para cualquier cantidad de pedido, el costo de compra del artículo es p_i.

3 EOQ_i es *admisible* si $b_{i-1} \leq EOQ_i < b_i$.

4 $TC(q)$ = costo anual real si se piden q artículos cada vez que se hace un pedido. ($TC(q)$ se determina por medio del precio p_i si $b_{i-1} \le q < b_i$.)

El objetivo es encontrar el valor de q que minimiza a $TC(q)$. Estas definiciones se ilustran en las figuras 7a y 7b. Observe que en la figura 7a, EOQ es admisible porque $b_1 < EOQ_2 < b_2$, pero EOQ_1 y EOQ_3 no son admisibles. En cada figura, $TC(q)$ es la parte continua de la curva. La parte con línea discontinua de cada curva representa costos inalcanzables. Por ejemplo, en la figura 7b, $TC_2(q)$ es una línea discontinua para $q < b_1$, debido a que el precio no es p_2 para $q < b_1$. Para $q < b_1$, el costo anual total está dado por la parte de línea continua de $TC_1(q)$, debido a que para $q < b_1$, el precio es p_1, y para $q \ge b_1$ el costo total anual está dado por la parte continua de $TC_2(q)$.

En general, el valor de q que minimiza a $TC(q)$ puede ser un punto de equilibrio (véase la figura 7b) o alguna EOQ_i (véase la figura 7a).

Las observaciones siguientes son útiles para determinar el punto (punto de equilibrio o EOQ_i) que minimiza a $TC(q)$.

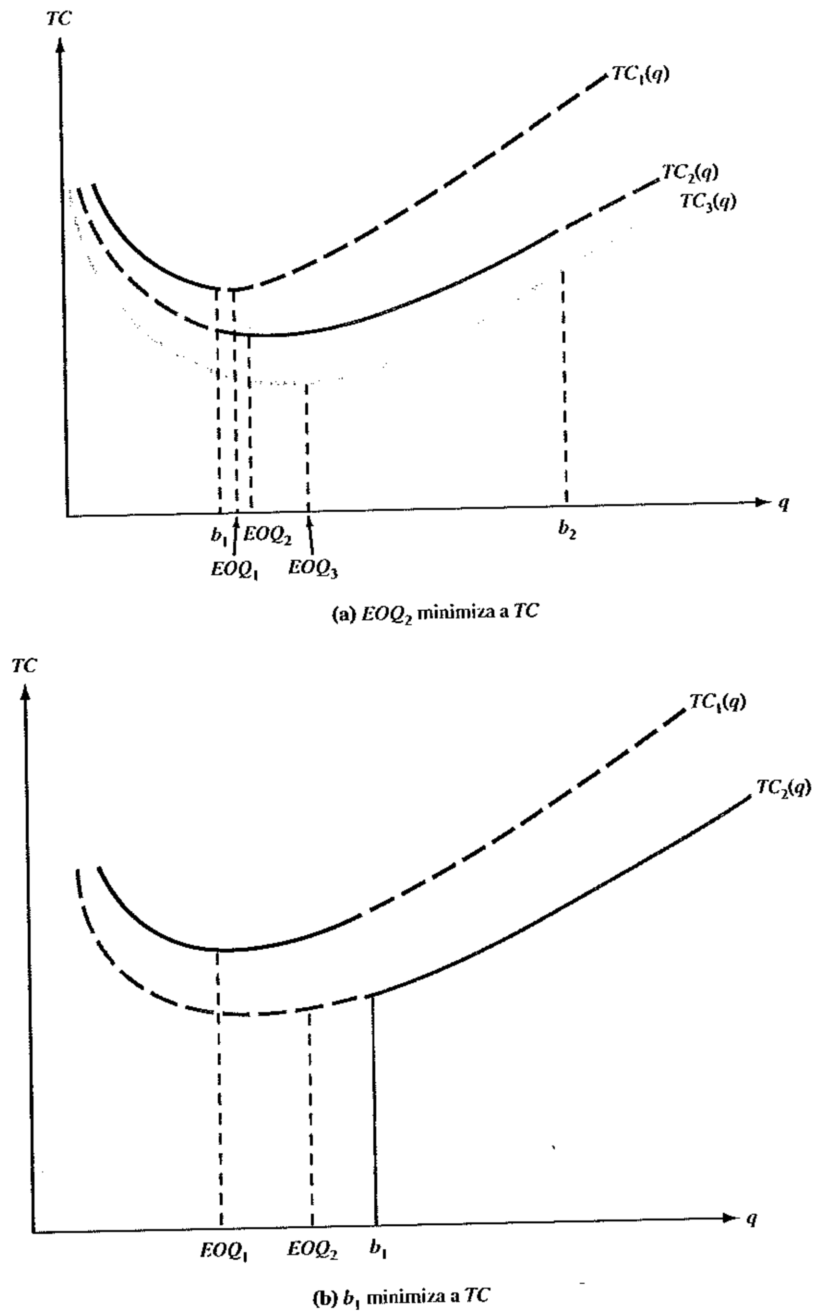


FIGURA 7
Ilustraciones de definiciones de $TC_i(q)$ y EOQ_i

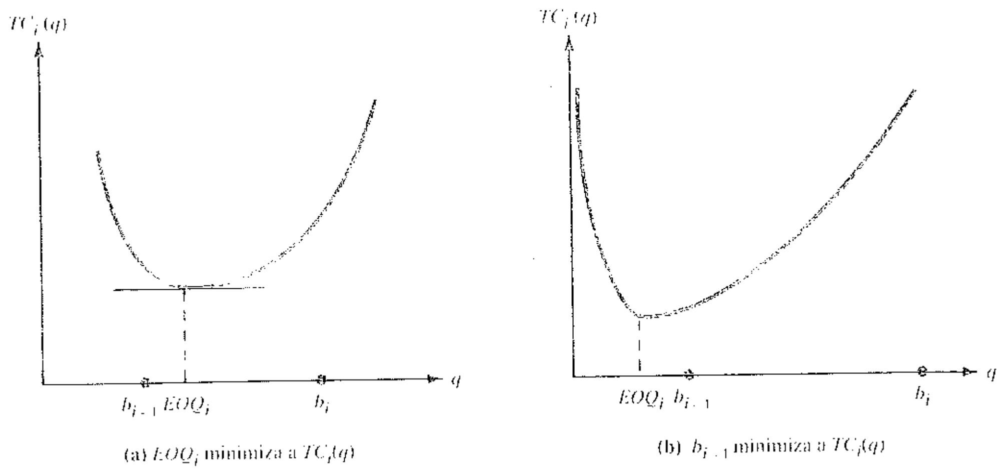


FIGURA 8
Para $b_{i-1} \le q < b_i$, ¿qué valor de q minimiza a $TC_i(q)$?

1 Para cualquier valor de q,

$$TC_k(q) < TC_{k-1}(q) < \cdots < TC_2(q) < TC_1(q)$$

Esta observación es válida porque para cualquier cantidad de pedido q, $TC_k(q)$ tendrá los costos mínimos de retención y compra, puesto que p_k es el precio disponible mínimo; $TC_1(q)$ tendrá los costos de retención y compra más altos, porque p_1 es el precio disponible más alto. Así, en la figura 7a, se encuentra que $TC_3(q) < TC_2(q) < TC_1(q)$.

2 Si EOQ_i es admisible, entonces el costo mínimo para $b_{i-1} \le q < b_i$ ocurre para $q = EOQ_i$ (véase la figura 8a). Si $EOQ_i < b_{i-1}$, el costo mínimo para $b_{i-1} \le q < b_i$ ocurre para $q = b_{i-1}$ (véase la figura 8b). Esta observación se deduce del hecho de que $TC_i(q)$ disminuye para $q < EOQ_i$ y se incrementa para $q > EOQ_i$.

3 Si EOQ_i es admisible, entonces $TC(q)$ no se puede minimizar a una cantidad de pedido para la cual el precio de compra por artículo es mayor que p_i. Así, si EOQ_i es admisible, la cantidad de pedido óptima debe ocurrir para el precio $p_i, p_{i+1}, \ldots,$ o p_k.

Para ver por qué se cumple la observación 3, suponga que EOQ_i es admisible. ¿Por qué una cantidad de pedido asociada con un precio $p_j > p_i$ no puede tener un costo menor que EOQ_i? Observe que EOQ_i minimiza el costo total anual si el precio es p_i y EOQ_j no minimiza el costo total anual si el precio es p_i. Así,

$$TC_i(EOQ_i) < TC_i(EOQ_j)$$

Puesto que $p_j > p_i$,

$$TC_i(EOQ_j) < TC_j(EOQ_j)$$

Las últimas dos desigualdades muestran que

$$TC_i(EOQ_i) < TC_j(EOQ_j)$$

Por la definición de EOQ_j, se sabe que para toda q,

$$TC_j(EOQ_j) \le TC_j(q)$$

Por consiguiente,

$$TC_i(EOQ_i) < TC_j(EOQ_j) \le TC_j(q)$$

y pedir EOQ_i al precio p_i es superior a pedir cualquier cantidad a un precio mayor p_j.

Estas observaciones nos permiten usar el siguiente método para determinar la cantidad óptima de pedido cuando se permiten descuentos de cantidad. Comenzando con el precio más bajo, determine para cada precio la cantidad de pedido que minimiza los costos anuales totales para $b_{i-1} \le q < b_i$ (llame a esta cantidad de pedido q_i^*). Continúe con la determinación de $q_k^*, q_{k-1}^*, \ldots$ hasta que una de las q_i^* (llámela q_i^*) sea admisible; de la observación 2, esto significará que $q_i^* = EOQ_i$. La cantidad de pedido óptima será el elemento de $\{q_k^*, q_{k-1}^*, \ldots, q_i^*\}$ con el valor más pequeño de $TC(q)$.

EJEMPLO 4 Compra de discos (continuación)

Cada vez que se hace un pedido de discos, ¿cuántas cajas de deben pedir? ¿Cuántos pedidos se harán al año? ¿Cuál es el costo anual de satisfacer las necesidades de discos de la empresa de contabilidad?

Solución Observe que $k = \$100$ y $D = 1\,000$ cajas por año. Primero se determina la mejor cantidad de pedido para $p_3 = \$48.50$ y $300 \leq q$. Entonces

$$EOQ_3 = \left(\frac{2(100)(1000)}{0.2(48\ 50)}\right)^{1/2} = 143.59$$

Puesto que $EOQ_3 < 300$, EOQ_3 no es admisible. Por consiguiente, la figura 8b es importante, y para $q \geq 300$, $TC_3(q)$ es minimizada por $q_3^* = 300$.

A continuación se considera $p_2 = \$49.00$ y $100 \leq q < 300$. Entonces

$$EOQ_2 = \left(\frac{2(100)(1000)}{9.8}\right)^{1/2} = 142.86$$

Puesto que $100 \leq EOQ_2 < 300$, EOQ_2 es admisible, y para un precio $p_2 = \$49.00$, lo mejor que se puede hacer es elegir $q_2^* = 142.86$; la figura 8a es importante. Puesto que q_2^* es admisible, $p_1 = \$50.00$ y $0 \leq q < 100$ no puede producir la cantidad de pedido que minimiza a $TC(q)$ (véase la observación 3). Así, ya sea $q_2^* = 142.86$ o $q_3^* = 300$ minimizarán a $TC(q)$. Para determinar cuál de estas cantidades de pedido minimiza a $TC(q)$, se debe encontrar el más pequeño de $TC_3(300)$ y $TC_2(142.86)$. Para $q_3^* = 300$, el costo de retención anual/artículo/año es $0.20(48.50) = \$9.70$. Así, para q_3^*,

$$\begin{aligned}
\text{Costo anual de formulación de pedido} &= 100(\tfrac{1000}{300}) = \$333.33\\
\text{Costo de compra anual} &= 1000(48.50) = \$48\,500\\
\text{Costo de retención anual} &= (\tfrac{1}{2})(300)(9.7) = \$1455\\
TC_3(300) &= \$50\,288.33
\end{aligned}$$

Para $q_2^* = 142.86$, el costo de retención anual/artículo/año es $0.20(49) = \$9.80$. Así, para q_2^*,

$$\begin{aligned}
\text{Costo anual de formulación de pedido} &= 100(\tfrac{1000}{142.86}) = \$699.99\\
\text{Costo de compra anual} &= 1000(49) = \$49\,000\\
\text{Costo de retención anual} &= (\tfrac{1}{2})(142.86)(9.8) = \$700.01\\
TC_2(142.86) &= \$50\,400
\end{aligned}$$

Así, $q_3^* = 300$ minimizará a $TC(q)$.

El análisis muestra que cada vez que se hace un pedido, se deben pedir 300 cajas de discos. Entonces $\frac{1000}{300} = 3.33$ pedidos se hacen cada año. Como ya se vio, el costo anual total mínimo es $50 288.33.

Plantilla de hoja de cálculo para descuentos de cantidad

Qd.xls

En la figura 9 (archivo.xls) se ilustra cómo los problemas de inventario con un descuento de cantidad se resuelven en una hoja de cálculo. En la celda B2 (a la que se le asigna el nombre de intervalo K), se introduce K, el costo por pedido. En la celda C2 (nombre de intervalo D) se introduce D, la demanda anual. En la celda D2 (HD), se introduce el costo anual de mantener en inventario $1 de bienes durante un año.

FIGURA 9
Cálculos de descuento de cantidad

A	A	B	C	D	E	F
1	CÁLCULOS DE	K	D	r por dólar		
2	DESCUENTO	100	1000	0.2		
3	DE CANTIDAD					
4						
5	PUNTO FINAL IZQUIERDO	PUNTO FINAL DERECHO	PRECIO	EOQ	CP DE COSTO MÍNIMO	COSTO MÍNIMO
6	0	100	$50.00	141.42135624	99.0000	$51,505.10
7	100	300	$49.00	142.85714286	142.8571	$50,400.00
8	300	10000	$48.50	143.59163172	300.0000	$50,288.33

En el intervalo de celda A6:C8, se introduce (usando los datos del ejemplo 4) el punto final del lado izquierdo y el precio para cada intervalo. Así, para una cantidad de pedido ≥ 0 y < 100 el precio por unidad es \$50. Ahora observe que la figura 8 implica que para cada intervalo el costo mínimo en ese intervalo se obtiene como sigue.

1 Si la EOQ para el precio del i-ésimo intervalo se encuentra en el intervalo, entonces la EOQ para ese intervalo obtiene el costo mínimo en el i-ésimo intervalo.

2 Si la EOQ para el precio del i-ésimo intervalo es más pequeña que el punto final izquierdo del i-ésimo intervalo (b_{i-1}), entonces el costo mínimo para ese intervalo se obtiene con una cantidad de pedido de b_{i-1}. Aquí se establece $b_0 = 0$.

3 Si la EOQ para el precio del i-ésimo intervalo es mayor que el punto final derecho para el i-ésimo intervalo (b_i), entonces el costo mínimo para ese intervalo se obtiene con una cantidad de pedido de $b_i - 1$.

La hoja de cálculo incorpora este razonamiento como sigue: en D6, se calcula la EOQ para el intervalo $b_0 = 0 \leq$ cantidad de pedido $< 100 = b_1$ introduciendo la fórmula (2*K*D/(HD*C6))^.5. En E6, se introduce la fórmula

=IF(AND(D6>=A6,D6<B6),D6,IF(D6<A6,A6,B6-1))

Esta expresión calcula la cantidad de pedido en el primer intervalo que minimiza los costos anuales mediante el razonamiento descrito en (1) a (3). En F6, se calcula el costo anual que corresponde a la cantidad de pedido en E6. Esto se determina mediante (K*D/E6)+D*C6+.5*HD*C6*E6.

En esta fórmula, el primer término es el costo anual de hacer pedidos; el segundo término es el costo de comprar la demanda de un año al precio del primer intervalo, y el tercer término es el costo de retención anual (cuyo costo por unidad es igual al precio del artículo multiplicado por el costo de retención anual por dólar de inventario). Copiar del intervalo D6:F6 a D6:F8 genera el costo anual mínimo para los otros dos intervalos. Se observa que el costo anual mínimo es \$50 288.33, y se obtiene por una cantidad de pedido de 300.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Una empresa consultora está tratando de determinar cómo minimizar los costos anuales asociados con la compra de papel continuo. Cada vez que se hace un pedido se incurre en un costo de 20 dólares. El precio por caja de papel continuo depende del número q, el número de cajas pedidas (véase la tabla 3). El costo de retención anual es 20% del valor de inventario en dólares. Durante cada mes, la empresa consultora utiliza 80 cajas de papel continuo. Determine la cantidad óptima de pedido y el número de pedidos hechos cada año.

2 Cada año, Shopalot Stores vende 10 000 cajas de soda. La compañía intenta determinar cuántas cajas debe pedir cada vez. El costo por procesar cada pedido es de 5 dólares y el costo de tener una caja de soda en inventario durante un año es 20% del precio de compra. El proveedor de soda ofre-

TABLA 3

Número de cajas pedidas	Precio por caja
$q < 300$	\$10.00
$300 \le q < 500$	\$9.80
$q \ge 500$	\$9.70

TABLA 4

Número de cajas pedidas	Precio por caja
$q < 200$	\$4.40
$200 \le q < 400$	\$4.20
$q \ge 400$	\$4.00

ce a Shopalot el programa de descuentos de cantidad mostrado en la tabla 4 (q = número de cajas ordenadas por pedido). Cada vez que se hace un pedido, ¿cuántas cajas de soda debe pedir la compañía?

3 Una empresa compra un producto usando el programa de precios dado en la tabla 5. La compañía estima costos de retención a 10% del precio de compra por año y costos de pedido a 40 dólares por pedido. La demanda anual de la empresa es de 460 unidades.

a Determine con qué frecuencia la empresa debe hacer sus pedidos.

b Determine el tamaño de cada pedido.

c ¿A qué precio la empresa debe formular un pedido?

TABLA 5

Tamaño del pedido	Precio por caja
0–99 unidades	\$20.00
100–199	\$19.50
200–499	\$19.00
500 o más	\$18.75

Grupo B

4 Un hospital ordena sus termómetros de una empresa abastecedora de hospitales. El costo por termómetro depende del tamaño del pedido q, como se ilustra en la tabla 6. El costo de retención anual es 25% del costo de compra. Sea EOQ_{80} la EOQ si el costo por termómetro son 80¢ y sea EOQ_{79} la EOQ si el costo por termómetro son 70¢.

a Explique por qué EOQ_{79} será mayor que EOQ_{80}.

b Explique por qué la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{79}, EOQ_{80}, o 100.

c Si $EOQ_{80} > 100$, demuestre que la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{79}.

d Si $EOQ_{80} < 100$ y $EOQ_{79} < 100$, demuestre que la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{80} o 100.

e Si $EOQ_{80} < 100$ y $EOQ_{79} > 100$, demuestre que la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{79}.

5 En el problema 4, suponga que el costo por pedido es 1 dólar y la demanda mensual es de 50 termómetros. ¿Cuál es la cantidad de pedido óptima? ¿Cuán pequeño podría ser el descuento que ofrezca el proveedor y pedir aun que el hospital acepte el descuento?

TABLA 6

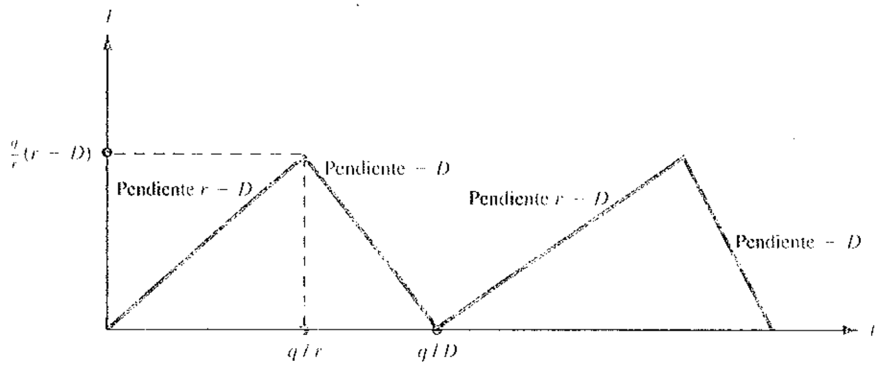
Tamaño del pedido	Precio por termómetro
$q < 100$	80¢
$q \ge 100$	79¢

15.4 Modelo EOQ de tasa continua

Muchos bienes se producen internamente en vez de comprarlos a un proveedor externo. En esta situación, la suposición EOQ de que cada pedido llega en el mismo instante al parecer es irreal; es imposible producir, por ejemplo, 10 000 automóviles en un santiamén. Si una compañía satisface la demanda al hacer sus propios productos, el modelo EOQ de tasa continua será más real que el modelo EOQ tradicional. De nuevo, se supone que la demanda es determinística y ocurre a una tasa constante; también se supone que no se permite que haya escasez.

El modelo EOQ de tasa continua supone que una empresa puede producir un bien a una tasa de r unidades por unidad de tiempo (de nuevo se utiliza un año como la unidad de tiempo). Esto significa que durante cualquier periodo de duración t, la empresa puede producir rt unidades. Se define

FIGURA 10
Variación de inventario para el modelo EOQ de tasa continua



q = número de unidades producidas durante cada corrida de producción
K = costo de puesta en marcha de una corrida de producción
(con frecuencia se debe a tiempo ocioso que ocurre al inicio o al final de la corrida de producción)
h = costo de retener una unidad en inventario por un año
D = demanda anual del producto

Suponiendo que una corrida de producción comienza en el tiempo 0, la variación de inventario con el tiempo se describe por medio de la figura 10. Al comienzo de una corrida de producción, se está produciendo a una tasa de r unidades por año, y la demanda está ocurriendo a una tasa de D unidades por año. Así, hasta que se producen q unidades, el inventario aumenta a una tasa de $r - D$ unidades por año. (Por supuesto, $r \geq D$ se debe cumplir, o de otra manera no se podría satisfacer la demanda.) En el instante $\frac{q}{r}$, se habrán producido q unidades. En este momento, la corrida de producción está completa, y el inventario disminuye a una tasa de D unidades por año hasta que se llega a una posición de inventario cero. En el instante $\frac{q}{D}$ ocurrirá un nivel de inventario cero. Entonces comienza otra corrida de producción.

Suponiendo que los costos de producción por unidad son independientes del tamaño de corrida, se debe determinar el valor de q que minimiza a

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} + \frac{\text{costo de preparación}}{\text{Año}}$$

Puesto que la demanda ocurre a una tasa constante, se sabe que (nivel de inventario promedio) = $(\frac{1}{2})$(nivel de inventario máximo). De la figura 10, se ve que el nivel de inventario máximo ocurre en el instante $\frac{q}{r}$. Puesto que entre cero y $\frac{q}{r}$, el nivel de inventario está aumentando a una tasa de $r - D$ unidades por año, el nivel de inventario en el instante $\frac{q}{r}$ será $(\frac{q}{r})(r - D)$. Entonces (nivel de inventario promedio) = $(\frac{1}{2})(\frac{q}{r})(r - D)$, y

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = h(\text{inventario promedio})(1 \text{ año}) = \frac{h(r - D)q}{2r}$$

Observe que el costo de retención anual para el modelo EOQ de tasa continua es el mismo que el de un modelo EOQ común en el que el costo de retención unitario es $\frac{h(r - D)}{r}$. Como de costumbre,

$$\frac{\text{Costo de pedido}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de pedido}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclo}}{\text{año}}\right) = \frac{KD}{q}$$

El análisis muestra que

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} + \frac{\text{costo de pedido}}{\text{año}} = \frac{hq(r - D)}{2r} + \frac{KD}{q}$$

La última ecuación muestra que el problema de minimizar la suma de los costos de retención y formulación de pedido anuales para el modelo de tasa continua es equivalente a resolver un modelo EOQ con costo de retención $\frac{h(r - D)}{r}$, costo de formulación de pedido K y demanda anual D. Usando esta observación y la fórmula (2) de la cantidad económica de pedido (o tamaño de lote), se podría deducir de inmediato que para el modelo EOQ de tasa continua,

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \left(\frac{2KD}{\frac{h(r-D)}{r}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2KDr}{h(r-D)}\right)^{1/2} \tag{7}$$

Como siempre, se deben ejecutar $\frac{D}{q}$ corridas cada año para satisfacer la demanda anual de D unidades. Usando el hecho de que

$$\text{EOQ} = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}$$

la ecuación (7) se puede rescribir como

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \text{EOQ}\left(\frac{r}{r-D}\right)^{1/2} \tag{8}$$

A medida que se incrementa r, la producción ocurre a una tasa más rápida. Por consiguiente, para r grande, el modelo de tasa continua debe tender a la situación de entrega instantánea del modelo EOQ. Para ver que éste es el caso, observe que para r grande, $\frac{r}{(r-D)}$ se aproxima a 1. Entonces (8) muestra que cuando r tiende al infinito, el tamaño óptimo de corrida para el modelo de tasa continua tiende a la EOQ.

EJEMPLO 5 Macho Auto Company

Macho Auto Company necesita producir 10 000 carrocerías para automóvil por año. Cada una se evalúa en 2000 dólares. La planta tiene la capacidad para producir 25 000 carrocerías por año. Cuesta 200 dólares preparar una corrida de producción, y el costo de retención anual es de 25¢, por dólar de inventario. Determine el tamaño óptimo de corrida de producción. ¿Cuántas corridas de producción se deben hacer cada año?

Solución Se tiene que

$$\begin{aligned} r &= 25\,000 \text{ carrocerías por año} \\ D &= 10\,000 \text{ carrocerías por año} \\ h &= 0.25(\$2000)/\text{carrocería/año} = \$500/\text{carrocería/año} \\ K &= \$200 \text{ por corrida de producción} \end{aligned}$$

De (7),

$$\text{Tamaño de corrida óptimo} = \left(\frac{2(200)(10\,000)(25\,000)}{500(25\,000-10\,000)}\right)^{1/2} = 115.47$$

También, $\frac{10\,000}{115.47} = 86.60$ corridas de producción se harán cada año.

Plantilla de hoja de cálculo para el modelo EOQ de tasa continua

ConEOQ.xls

La figura 11 (archivo ConEOQ.xls) ilustra una plantilla para el modelo EOQ de tasa continua. En la celda A6, el usuario introduce K; en B6, h; en C6, D, y en D6, la tasa de producción r. En la figura 11 hemos utilizado los valores de parámetro dados en el ejemplo 5. En A8 (asignado el nombre de intervalo Q), la fórmula (2*K*D/H)^.5*(R/(R−D))^.5 (de nuevo se están usando nombres de intervalo) calcula el tamaño óptimo de corrida. En B8, la fórmula D/Q calcula el número de corridas por año. En C8, se calcula el costo anual (exclusivo de los costos de compra) con la fórmula (H*Q*(R−D)/(2*R))+K*D/Q. El primer término de esta fórmula es igual al costo anual de inventario de reserva. Esto se deduce,

	A	B	C	D
1	MODELO			
2	EOQ			
3	DE TASA			
4	CONTINUA			
5	K	h	D	r
6	200	500	10000	25000
7	TAMAÑO DE CORRIDA	CORRIDAS POR AÑO	COSTO/AÑO	
8	115.47005383793	86.60254	34641.016	

FIGURA 11
Modelo EOQ de tasa continua

porque, de la figura 10, el nivel máximo de inventario durante un ciclo es $q(r - D)/r$. El segundo término es el costo anual de hacer pedidos.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que el tamaño óptimo de corrida siempre excede la EOQ. Dé una explicación intuitiva para este resultado.

2 Una compañía puede producir 100 computadoras domésticas por día. El costo de preparación para una corrida de producción es de 1000 dólares. El costo de tener una computadora en inventario durante un año es \$300. La demanda de los clientes es de 2000 computadoras domésticas por mes (suponga que 1 mes = 30 días y 360 días = 1 año). ¿Cuál es el tamaño óptimo de corrida de producción? ¿Cuántas corridas de producción se deben hacer por año?

3 El proceso de producción en Father Dominic's Pizza puede producir 400 bases para pizza por día; la empresa opera 250 días por año. Father Dominic's tiene un costo de \$180 por corrida de producción y un costo de retención de \$5 por pizza-año. Las bases para pizza se congelan de inmediato después que se producen y se almacenan en una bodega refrigerada con una capacidad máxima actual de 2000 bases.

a La demanda anual es de 37500 bases por año. ¿Qué tamaño de corrida de producción se debe usar?

b ¿Cuál es el costo anual en que se incurre para satisfacer la demanda?

c ¿Cuántos días por año la compañía estará produciendo bases para pizza?

Grupo B

4 Una compañía tiene la opción de comprar un bien o fabricarlo. Si se compra el artículo, se le cobrará a la compañía \$25 unidad más un costo de \$4 por pedido. Si la compañía fabrica el artículo, tiene una capacidad de producción de 8000 unidades por año. Cuesta \$50 preparar una corrida de producción, y la demanda anual es de 3000 unidades por año. Si el costo de retención anual es 10% y el costo de fabricar una unidad son \$23, determine si la compañía debe comprar o fabricar el artículo.

15.5 Modelo EOQ en el que se permiten pedidos atrasados

En muchas situaciones de la vida real, la demanda no se satisface a tiempo y hay escasez. Cuando hay escasez, se incurre en costos (debido a los negocios perdidos, el costo de hacer pedidos especiales, pérdida futura de renombre comercial, etcétera). En esta sección, se modifica el modelo EOQ de la sección 15.2 para permitir la posibilidad de desabastecimiento. Sea s el costo por faltar una unidad durante un año. Las variables K, D y h tienen sus significados usuales. En la mayoría de los casos, es muy difícil determinar s. Suponga que la demanda se acumula y no se pierden ventas. Para determinar la política de pedidos que minimiza los costos anuales, se define

$$q = \text{cantidad de pedido}$$
$$q - M = \text{escasez máxima que ocurre en una política de formulación de pedidos}$$

De forma equivalente (suponiendo un plazo de entrega cero), la empresa tendrá un déficit de $q - M$ unidades cada vez que se hace un pedido.

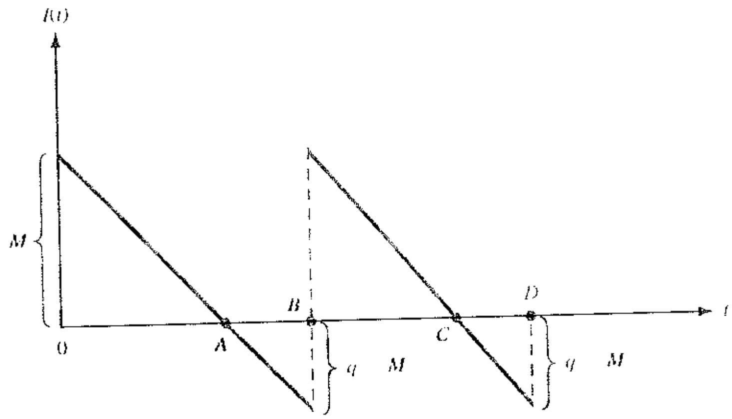


FIGURA 12 Evolución del inventario con el tiempo para el modelo EOQ con pedidos atrasados permitidos

Se supone que el plazo de entrega para cada pedido es cero. Puesto que se hace un pedido cada vez que la empresa tiene un déficit de $q - M$ unidades (o cuando el estado del inventario de la empresa es $M - q$), el nivel de inventario máximo de la empresa será $M - q + q = M$. Por ejemplo, si $q = 500$ y $q - M = 100$, se sabe que usará un pedido de 500 unidades para satisfacer la demanda atrasada de 100 unidades y se tendrá un nivel de inventario de $500 - 100 = 400$ unidades.

Suponiendo que en el tiempo 0 se hace un pedido, la figura 12 describe la evolución del nivel de inventario con el tiempo. Puesto que los costos de compra no dependen de q y M, se pueden minimizar los costos anuales al determinar los valores de q y M que minimizan a

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} + \frac{\text{costo por déficit}}{\text{año}} + \frac{\text{costo de pedido}}{\text{año}} \tag{9}$$

Observe que lo que sucede entre el tiempo 0 y el tiempo B es idéntico a lo que sucede entre el tiempo B y el tiempo D. Por esta razón, a los periodos $0B$ y BD se les llama **ciclos.** Un ciclo se podría considerar también como el intervalo de tiempo entre la colocación de los pedidos. Para determinar el costo de retención por año y el costo de escasez por año, se comienza por determinar el costo de retención por ciclo y el costo de escasez por ciclo. Esto requiere determinar la longitud de los segmentos de línea $0A$ y AB en la figura 12. Puesto que un nivel de inventario cero ocurre después de haber pedido M unidades, se concluye que $0A = \frac{M}{D}$. Puesto que un ciclo concluye cuando se han pedido q unidades, se concluye que $0B = \frac{q}{D}$. Entonces

$$\text{Longitud de } AB = (\text{longitud de } 0B) - (\text{longitud de } 0A) = \frac{q - M}{D}$$

También observe que como se pidieron q unidades durante cada ciclo, $\frac{D}{q}$ ciclos (y pedidos) se deben hacer cada año. Ahora se pueden expresar los costos de (9). Recuerde que

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de retención}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{año}}\right)$$

y

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{ciclo}} = \text{costo de retención del tiempo 0 al tiempo } A$$

De la figura 12, el nivel de inventario promedio entre el tiempo 0 y el tiempo A es simplemente $\frac{M}{2}$. Puesto que $0A$ es la longitud de $\frac{M}{D}$,

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{ciclo}} = \left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{M}{D}\right)h = \frac{M^2h}{2D}$$

Puesto que hay $\frac{D}{q}$ ciclos por año,

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \left(\frac{M^2h}{2D}\right)\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{M^2h}{2q}$$

De manera similar,

$$\frac{\text{Costo de escasez}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de escasez}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{año}}\right)$$

Observe también que el costo de escasez por ciclo = costo de escasez en que se incurre durante el tiempo AB. Puesto que la demanda ocurre a una tasa constante, el nivel de escasez promedio durante el tiempo AB es simplemente la mitad de la escasez máxima. Así, el nivel de escasez promedio en el intervalo de tiempo AB es $\frac{q-M}{2}$. Puesto que AB es el intervalo de tiempo de longitud $\frac{q-M}{D}$,

$$\frac{\text{Costo de escasez}}{\text{Ciclo}} = \frac{1}{2}\left(q - M\right)\left(\frac{q-M}{D}\right)s = \frac{(q-M)^2s}{2D}$$

Puesto que hay $\frac{D}{q}$ ciclos por año,

$$\frac{\text{Costo de escasez}}{\text{Año}} = \frac{(q-M)^2s}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{(q-M)^2s}{2q}$$

Como siempre, el costo de formulación de pedido por año $= \frac{KD}{q}$. Sea $TC(q, M)$ el costo total anual (excluyendo el costo de compra) si en la política de pedidos se utilizan los parámetros q y M. Del análisis, se debe elegir q y M para minimizar

$$TC(q, M) = \frac{M^2h}{2q} + \frac{(q-M)^2s}{2q} + \frac{KD}{q}$$

Usando el teorema 3 del capítulo 11, se puede demostrar que $TC(q, M)$ es una función convexa de q y M. De los teoremas 1′ y 7 del capítulo 11, el valor mínimo del $TC(q, M)$ ocurrirá en el punto donde

$$\frac{\partial TC}{\partial q} = \frac{\partial TC}{\partial M} = 0$$

Con un poco de álgebra tediosa se demuestra que $TC(q, M)$ se minimiza para q^* y M^*:

$$q^* = \left[\frac{2KD(h+s)}{hs}\right]^{1/2} = \text{EOQ}\left(\frac{h+s}{s}\right)^{1/2}$$

$$M^* = \left[\frac{2KDs}{h(h+s)}\right]^{1/2} = \text{EOQ}\left(\frac{s}{h+s}\right)^{1/2}$$

$$\text{Escasez máxima} = q^* - M^*$$

Cuando s tiende a infinito, q^* y M^* se aproximan a EOQ y el déficit máximo tiende a cero. Esto es razonable, debido a que si s es grande, el costo de un déficit es prohibitivo, y se esperaría que la política de pedidos óptima incurra en muy pocos, si hay, desabastecimientos. En otras palabras, si s es muy grande, se tiene ante sí (para todos los intentos y propósitos) la situación en la que no se permiten desabastecimientos de la sección 15.2.

EJEMPLO 6 Clínica de optometría Smalltown

Cada año, la clínica de optometría Smalltown vende 10 000 armazones para anteojos. La clínica pide los armazones a un proveedor regional, que cobra 15 dólares por armazón. En cada pedido se incurre en un costo de 50 dólares. La clínica considera que la demanda de armazones se puede retrasar y que el costo de tener un déficit de una armazón durante 1 año son 15 dólares (debido a la pérdida de negocios futuros). El costo de retención anual para el inventario es de 30¢ por valor en dólares de inventario. ¿Cuál es la cantidad óptima de pedido? ¿Cuál es el déficit máximo que ocurrirá? ¿Cuál es el nivel de inventario máximo que ocurrirá?

Solución Se tiene que

$$K = \$50$$
$$D = 10\,000 \text{ armazones por año}$$
$$h = 0.3(15) = \$4.50/\text{armazón/año}$$
$$s = \$15/\text{armazón/año}$$

De la fórmula para q^* y M^*, se obtiene

$$q^* = \left(\frac{2(50)(10\,000)(19.50)}{(4.50)(15)}\right)^{1/2} = 537.48$$

$$M^* = \left(\frac{2(50)(10\,000)(15)}{(4.50)(19.50)}\right)^{1/2} = 413.45$$

Entonces el déficit máximo que ocurre será $q^* - M^* = 124.03$ armazones, y cada pedido debe ser por 537 o 538 armazones. Ocurrirá un nivel de inventario máximo de $M^* = 413.45$ armazones.

Como en la sección 15.4, suponga que la producción no es instantánea y se puede producir a una tasa de r unidades por año. Si se permite que haya déficit, se puede demostrar que

$$q^* = \left(\frac{2KDr(h+s)}{h(r-D)s}\right)^{1/2}$$

$$M^* = \frac{q^*(r-D)}{r} - \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)}\right)^{1/2}$$

El déficit máximo que ocurre en este caso (llámelo S^*) está dado por

$$S^* = \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)}\right)^{1/2}$$

Plantilla de hoja de cálculo para el modelo EOQ con pedidos atrasados

BackEOQ.xls

En la figura 13 (archivo BackEOQ.xls) se ilustra una plantilla de hoja de cálculo para el modelo EOQ con pedidos atrasados. En las celdas A6, B6, C6 y D6, se introducen los valores de K, D, h y s, respectivamente, para el ejemplo 6. En A8 (con el nombre de intervalo Q), se calcula la cantidad óptima de pedido con la fórmula 2*K*D*(H+S)/(H*S))^.5. En B8 (nombre de intervalo M), se calcula el valor óptimo de M con la fórmula

A	A	B	C	D
1	MODELO			
2	EOQ CON			
3	PEDIDOS			
4	ATRASADOS			
5	K	D	h	s
6	50	10000	4.5	15
7	q*	M*	DÉFICIT MÁXIMO	COSTO ANUAL
8	537.48384989	413.44912	124.03473459	1860.52101884

FIGURA 13 Modelo EOQ con pedidos atrasados

(2*K*D*S/(H*(H+S)))^.5. En C8, se calcula el déficit máximo con la fórmula Q−M. En D8, se calcula el costo total anual $TC(q, M)$ (exclusivo de los costos de compra) con la fórmula (M^2*H)/(2*Q)+(Q−M)^2*S/2*Q)+(K*D/Q).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que la cantidad óptima de pedido para el modelo de demanda atrasada es siempre por lo menos tan grande como la EOQ pero que el nivel de inventario máximo para el modelo de demanda atrasada no puede exceder la EOQ.

2 Un distribuidor de Mercedes debe pagar 20 000 dólares por cada automóvil comprado. Se estima que el costo de retención anual es 25% del valor de inventario en dólares. El distribuidor vende un promedio de 500 automóviles por año. Él considera que la demanda está atrasada, pero estima que si tiene un déficit de un automóvil durante un año, perderá un valor de 20 000 dólares de ganancias futuras. Cada vez que el distribuidor hace un pedido de automóviles, el costo de formulación de pedido suma 10 000 dólares. Determine la política óptima de formulación de pedido del distribuidor. ¿Cuál es el déficit máximo que ocurrirá?

Grupo B

3 Suponga que en vez de medir el déficit en términos del costo por año de déficit, se incurre en un costo de S dólares por cada unidad de déficit de la empresa. Este costo no depende del tiempo transcurrido antes que se satisfaga la demanda atrasada. Determine una nueva expresión para $TC(q, M)$ y explique cómo determinar los valores óptimos de q^* y M^*.

4 Para el modelo desarrollado en esta sección, determine:

a El tiempo promedio que toma entregar una unidad.

b La fracción de las unidades demandadas que no se han entregado.

15.6 Cuándo usar modelos EOQ

La demanda a menudo es irregular. Esto podría deberse a la temporada u otros factores. Si la demanda es irregular, no se satisface la suposición de demanda constante que se requirió para los modelos EOQ.

Para determinar si la suposición de demanda constante es razonable, suponga que durante n periodos se han observado las demandas $d_1, d_2, \ldots, d_n$. También, se sabe lo suficiente acerca de las demandas futuras para hacer que sea real la suposición de demanda determinística. Para decidir si la demanda es lo bastante regular para justificar el uso de modelos EOQ, Peterson y Silver (1998) recomendaron hacer los cálculos siguientes:

1 Determinar la estimación $\bar{d}$ de la demanda promedio por periodo dada por

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} d_i$$

2 Determinar una estimación de la varianza de la demanda **D** por periodo a partir de

$$\text{Var.Est. } \mathbf{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} d_i^2 - \bar{d}^2$$

3 Determinar una estimación de la variabilidad relativa de demanda (desígnelo como **coeficiente de variabilidad**). Esta cantidad se identifica como CV, donde

$$VC = \frac{\text{Var.Est. } \mathbf{D}}{\bar{d}^2}$$

Observe que si las d_i son iguales, la estimación de la varianza de **D** será igual a cero. Esto también hará que $CV = 0$. Por consiguiente, si CV es pequeño, esto indica que es razonable la suposición de demanda constante. De acuerdo con las investigaciones EOQ se debe usar si $CV < 0.20$; de lo contrario, la demanda es muy irregular para justificar el uso de un modelo EOQ. Véase Peterson y Silver (1998).

Si $CV > 0.20$, los métodos de programación dinámicos y el heurístico de Silver-Meal, que se analizan en el capítulo 18, se podrían usar para determinar políticas óptimas de formulación de pedidos.

Como ejemplo del uso de la fórmula para CV, suponga que las demandas durante los cuatro trimestres del año pasado fueron como sigue: 80 unidades, 100 unidades, 130 unidades y 90 unidades. Suponiendo que se sabe que la demanda futura sigue un patrón similar, ¿se debe usar un modelo EOQ en esta situación?

Puesto que $\bar{d} = \frac{400}{4} = 100$ y Var. Est. $\mathbf{D} = (\frac{1}{4})(80^2 + 100^2 + 130^2 + 90^2) - 100^2 = 350$ se tiene $CV = \frac{350}{(100)^2} = 0.035$. Puesto que CV es más pequeño que 0.20, se puede usar un modelo EOQ en este caso.

Para finalizar, observe que los modelos EOQ de este capítulo requieren la suposición implícita de que las demandas durante diferentes periodos son independientes. En otras palabras, los modelos EOQ requieren que cualquier conocimiento acerca de la demanda durante un periodo no dé información acerca de la demanda en cualquier otro punto del tiempo. Si las necesidades de inventario de una empresa se satisfacen a través de la producción interna, esto suele ser una suposición irreal. Por ejemplo, suponga que el 11 de diciembre una compañía necesita producir 5 unidades del producto A, y que cada unidad de producto A requiere 2 unidades de producto B y tres unidades del producto C. Una vez que están disponibles los productos B y C, toma diez días ensamblar una unidad del producto A. Entonces el hecho de que haya una demanda para 5 unidades de producto A el 11 de diciembre crea una demanda para 10 unidades del producto B y 15 unidades del producto C el 1 de diciembre. Por lo tanto, la demanda del 1 de diciembre para los productos B y C *depende* de la demanda del 11 de diciembre para el producto A. Los modelos EOQ no toman en cuenta la dependencia de la demanda que está presente en muchas situaciones de manufactura. Éstos se explotan mejor si se utilizan sistemas de planificación de recursos materiales (PRM).

OBSERVACIÓN Utilice los comandos de Excel **=AVERAGE**, para estimar la demanda promedio durante un periodo determinado, y **=VARP**, para estimar la varianza en la demanda para un periodo específico.

PROBLEMA

Grupo A

1 La demanda observada para los acondicionadores de aire durante los últimos cuatro trimestres fue como sigue: otoño, 100; invierno, 50; primavera, 150; verano, 300. ¿Es razonable usar un modelo EOQ en esta situación?

15.7 Modelos EOQ de producto múltiple

Suponga que una compañía pide varios productos. Cada vez que se recibe un pedido, llegan los envíos de algunos (pero quizá no todos) de los productos. Cada vez que llega un pedido, hay un costo fijo asociado con el pedido (por ejemplo, el costo de manejar un camión para entregar el pedido), y hay otro costo fijo asociado con cada producto incluido en el pedido. ¿Cómo podemos minimizar la suma de los costos anuales de retención y fijos? Un ejemplo de esta situación sería un almacén de aparatos que pide tres tipos de aparatos a un proveedor. Para un producto de poca demanda, sería ilógico pedir el producto cada vez que llega un camión. Chopra y Meindl (2001) diseñaron un método para hallar una solución casi óptima a este problema. Para empezar, se define el producto que se pide con más frecuencia. Suponga que es el producto 1; se supone que este producto se incluirá en cada pedido. Luego, se prepara un modelo Solver que determina las siguientes celdas cambiantes:

- Número de pedidos recibidos por año. Observe que se supone que cada pedido contiene un envío del producto 1.
- Para los productos distintos al producto 1, el número de pedidos que se necesita recibir antes que se reciba un pedido del producto. Si, por ejemplo, el producto 2 debe estar contenido en cada tercer pedido, entonces la celda cambiante para el producto 2 será igual a 3.

Dados los valores de prueba de estas cantidades, se puede determinar fácilmente el costo fijo total (suma de costo fijo para cada producto más costo fijo para cada pedido) y el costo de retención total para cada producto. La suma de estos costos será la celda objetivo para el Solver. El modelo tiene poca linealidad. Es necesario usar el *Evolutionary Solver* para encontrar la solución óptima. A continuación se da un ejemplo del método.

EJEMPLO 7 Ohm City Appliances

Ohm City Appliances recibe de Springfield TV tres tipos de TV. En la figura 14 se da la demanda anual, el costo de compra unitario, el costo de retención anual (como porcentaje del costo de compra), el costo fijo de pedir un producto y el costo fijo de hacer un pedido. Determine la política de formulación de pedido que minimiza la suma de los costos fijo y de retención.

FIGURA 14

	A	B	C	D	E	F
4						
5						
6			Producto 1	Producto 2	Producto 3	
7		demanda anual	12000	1200	120	
8		costo unitario	$ 500.00	$ 500.00	$ 500.00	
9		costo de retención	0.2	0.2	0.2	
10		costo de pedir el producto	$ 1 000.00	$ 1 000.00	$ 1 000.00	
11		EOQ	489.8979486	154.9193338	48.989795	
12		pedidos por año	24.49489743	7.745966692	2.4494897	
13		costo de pedido global	$ 4 000.00			
14						
15		Pedidos por año P1	10.46135741			
16		Pedidos P1 por P2	1			
17		Pedidos P1 por P3	4			
18		Pedidos por año P2	10.46135741			
19		Pedidos por año P3	2.615339354			
20						
21						
22						
23		Costo anual principal de pedido	$ 41 845.43			
24						
25			Producto 1	Producto 2	Producto 3	
26		Cantidad de pedido	1147.078675	114.7078675	45.883147	
27		Inventario promedio	573.5393374	57.35393374	22.941573	
28		Costo de retención anual	$ 57 353.93	$ 5 735.39	$ 2 294.16	
29		Costo anual de formulación	$ 10 461.36	$ 10 461.36	$ 2 615.34	
30		de pedido del producto				
31						
32		Costo anual total	$ 130 766.97			
33						

Solución Nuestro trabajo está en el archivo MultipleEOQ.xls. También véase la figura 14.

MultipleEOQ.xls

Paso 1 En C11:E11, se calcula el EOQ para cada producto al copiar de C11 a D11:E11 la fórmula

=SQRT(2*C10*C7/(C9*C8))

Entonces, en C12:E12, se calcula el número de veces que se pide cada producto durante un año copiando de C12 a D12:E12 la fórmula

=C7/C11

Se encuentra que el producto pedido con más frecuencia es el 1.

Paso 2 En la celda C15, se introduce un valor de prueba (no necesariamente un entero) para el número de pedidos hechos cada año. En C16, se introduce un valor de prueba (que debe ser un entero) para el número de pedidos con el producto 1 que deben ser recibidos antes que se reciba un pedido del producto 2. En C17, se introduce un valor de prueba (que debe ser un entero) para el número de pedidos con el producto 1 que deben ser recibidos antes de obtener un pedido del producto 3.

Paso 3 En la celda C23, se calcula el costo fijo total asociado con los pedidos como (número de pedidos por año)*(costo por pedido) con la fórmula

=C15*C13

Paso 4 En las celdas C18 y C19, se calcula el número de veces que se pide cada año el producto I (I = 2 o 3) al calcular (pedidos por año)*(fracción de pedidos que contienen el producto I).

=$C$15/C16 (celda C18: pedidos del producto 2 por año)

=$C$15/C17 (celda C19: pedidos del producto 3 por año)

Paso 5 En la celda C26, se calcula el tamaño de cada pedido del producto 1 como (demanda anual del producto 1)/(pedidos del producto 1 recibidos cada año).

=C7/C15

En una situación similar, se calcula el tamaño de los pedidos de los productos 2 y 3 en las celdas D26 y E26.

=D7/C18 (celda D26: tamaño de pedido del producto 2)

=E7/C19 (celda E26: tamaño de pedido del producto 3)

Paso 6 En C27:E27, se calcula el nivel de inventario promedio para cada producto como la mitad del tamaño de pedido. Para hacer esto, copie de C27 a D27:E27 la fórmula

=0.5*C26

Paso 7 En C28:E28, se calcula el costo de retención anual para cada producto como (nivel promedio de inventario para el producto)*(costo anual de mantener una unidad del producto en inventario). Para hacer esto, copie de C28 a D28:E28 la fórmula

=C9*C8*C27

Paso 8 En C29:E29, se calcula el costo anual de formulación de pedido para cada producto como (costo por pedido para el producto)*(veces que se pide el producto por año). Por ejemplo, en la celda C29, se calcula el costo anual de formulación de pedido para el producto 1 con la fórmula

=C10*C15

Paso 9 En la celda C32, se calcula el costo total anual (exclusivo de los costos de compra, que no dependen de la política de pedidos) con la fórmula

=SUM(C28:E29)+C23

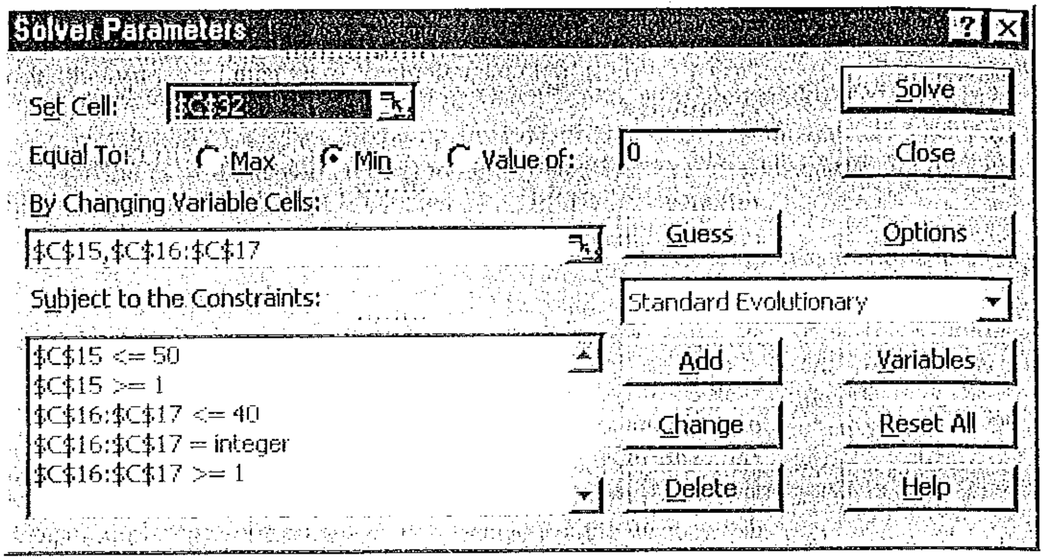


FIGURA **15**
Ventana de Solver para Ohm City Appliances

Paso 10 Ahora se utiliza Solver para encontrar la política de pedidos con minimización de costos. En la figura 15 se muestra la ventana de Solver.

El costo total (C32) se minimiza al cambiar el número de pedidos por año (C15) y el número de pedidos que se debe hacer antes de realizar los pedidos de productos solicitados con menos frecuencia (C16 y C17). Se requiere un entero para el número de pedidos antes de hacer el pedido de cada uno de los productos solicitados con menos frecuencia. Se incluyen los límites inferior y superior que requiere el *Evolutionary Solver* para cada celda cambiante.

Se encuentra que cada año se deben recibir 10.46 camiones cargados con televisores. Cada camión tendrá 1 147 televisores tipo 1, y 114 televisores tipo 2. 25% de los pedidos incluirán un pedido de 46 televisores tipo 3. Observe que se piden con poca frecuencia los televisores tipo 3 de baja demanda.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Square City Appliance pide cuatro tipos de máquinas de lavado. En la tabla 7 se da la demanda anual, costo de compra y costo de retención anual (como un porcentaje del costo de compra) y el costo fijo de pedir un producto. Determine una política de pedidos que minimice el costo de satisfacer la demanda.

2 Del problema 1 suponga que Square City fabrica las lavadoras. La compañía puede producirlas a una tasa de 30 000 por año. ¿Qué política de manufactura minimizará el costo anual de satisfacer la demanda?

TABLA **7**

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Demanda anual	10 000	3000	4000	500
Costo de compra unitario	$400	$300	$200	$900
Porcentaje de costo de retención	.2	.2	.2	.2
Costo de pedir el producto	$1000	$1000	$1000	$1000

RESUMEN Notación

K = costo de preparación o formulación de pedido

h = costo de mantener una unidad en inventario durante una unidad de tiempo

D = tasa de demanda por unidad de tiempo

r = tasa a la cual la empresa puede hacer el producto unidad de tiempo ($r > D$)

s = costo de tener un déficit de una unidad durante una unidad de tiempo

Modelo EOQ básico

$$\text{Cantidad de pedido} = q^* = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}$$

$\frac{D}{q^*}$ pedidos se hacen cada unidad de tiempo.

Modelo de descuento de cantidad

Si $q < b_1$, cada artículo cuesta p_1 dólares.
Si $b_1 \le q < b_2$, cada artículo cuesta p_2 dólares.
Si $b_{k-2} \le q < b_{k-1}$, cada artículo cuesta p_{k-1} dólares.
Si $b_{k-1} \le q < b_k = \infty$, cada artículo cuesta p_k dólares.

Empezando con el precio más bajo, determine para cada precio la cantidad de pedido (q_i^*) que minimiza los costos totales anuales para $b_{i-1} \le q < b_i$. Continúe con la determinación de $q_k^*, q_{k-1}^*, \ldots$ hasta que una de las q_i^* (llámela $q_{i'}^*$) sea admisible; de la observación 2, esto significará que $q_{i'}^* = EOQ_{i'}$. La cantidad óptima de pedido será el elemento de $\{q_k^*, q_{k-1}^*, \ldots, q_{i'}^*\}$ con el valor más pequeño de $TC(q)$.

Si EOQ_i es admisible, entonces $q_i^* = EOQ_i$. Si $EOQ_i < b_{i-1}$, entonces $q_i^* = b_{i-1}$.

Modelo de tasa continua

$$\text{Tamaño de corrida óptima} = \left[\frac{2KDr}{h(r-D)}\right]^{1/2}$$

EOQ con pedidos atrasados permitidos

q^* = cantidad óptima de pedido

M^* = nivel de inventario máximo en la política óptima de formulación de pedidos

$q^* - M^*$ = déficit máximo que ocurre en la política óptima de formulación de pedidos

$$q^* = \left[\frac{2KD(h+s)}{hs}\right]^{1/2} = \text{EOQ}\left(\frac{h+s}{s}\right)^{1/2}$$

$$M^* = \left[\frac{2KDs}{h(h+s)}\right]^{1/2} = \text{EOQ}\left(\frac{s}{h+s}\right)^{1/2}$$

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Los clientes de Joe Office Supply Store demandan un promedio de 6 000 escritorios por año. Cada vez que se hace un pedido, se incurre en un costo de formulación de pedido de $300. El costo de retención anual para un solo escritorio es 25% del costo de 200 dólares de un escritorio. Transcurre una semana entre la fecha en que se hace el pedido y la llegada de éste. En los incisos (a)–(d), suponga que no se permite que haya escasez.

a Cada vez que se hace un pedido, ¿cuántos escritorios se deben pedir?

b ¿Cuántos escritorios se deben pedir cada año?

c Determine los costos anuales totales (excluyendo los costos de compra) de satisfacer a los clientes que requieren escritorios.

d Determine el punto de reabastecimiento. Si el tiempo de entrega fueran cinco semanas, ¿cuál sería el punto de reabastecimiento? (52 semanas = un año).

e ¿Cómo cambiarían las respuestas a los incisos (a) y (b) si se permitiera que hubiera escasez y se incurriera en un costo de 80 dólares si Joe tuviera un déficit de un escritorio durante un año?

2 Suponga que Joe está considerando fabricar escritorios. Cuesta 250 dólares preparar una corrida de producción y Joe tiene capacidad para fabricar hasta 10 000 escritorios por año. ¿Cuál es el tamaño óptimo de corrida de producción? ¿Cuántas corridas de producción se harán cada año?

3 Una tienda de cámaras vende un promedio de 100 cámaras por mes. El costo de tener una cámara en inventario durante un año es 30% del precio que la tienda paga por la cámara. A la tienda le cuesta $120 dólares cada vez que la tienda hace un pedido con su proveedor. El precio cargado por cámara depende del número de cámaras pedido (véase la tabla 8). Cada vez que la tienda de cámaras hace un pedido, ¿cuántas cámaras se deben pedir?

TABLA 8

Número de cámaras pedidas	Precio por cámara
1–10	$10.00
11–40	$9.00
41–100	$7.00
Más de 100	$5.50

TABLA 9

	Artículo 1	Artículo 2
Demanda anual	6000	4000
Costo por unidad	$4.00	$3.50
Costo retención anual	30% por año	25% por año
Precio por pedido	$35	$20

Grupo B

4 Una compañía hace una lista detallada de dos artículos. Los datos pertinentes para cada artículo se muestran en la tabla 9. Determine la política de inventarios óptima si no se permite que haya déficit y si la inversión promedio en inventario se mantiene abajo de 700 dólares. Si esta restricción se pudiera relajar por un dólar, ¿por cuánto disminuirían los costos anuales de la compañía? (Este problema requiere conocer la sección 11.8).

5 Una compañía produce tres clases de artículos. Se utiliza una sola máquina para producir los tres artículos en una base cíclica. La compañía tiene la política de que cada artículo se produce una vez durante cada ciclo y quiere determinar el número de ciclos de producción por año que minimizarán la suma de los costos de retención y preparación (no se permite que haya escasez). Se tienen los datos siguientes:

P_i = número de unidades del producto i que se podrían producir por año si la máquina estuviera dedicada por completo a producir el producto i.

D_i = demanda anual para el producto i.

K_i = costo de preparar la producción del producto i.

h_i = costo de mantener una unidad de producto i en inventario durante un año.

a Suponga que hay N ciclos por año. Suponiendo que durante cada ciclo se satisface una fracción $\frac{1}{N}$ de toda la demanda para cada producto, determine el costo de retención anual y el costo de preparación anual.

b Sea q_i^* el número de unidades del producto i producidas durante cada ciclo. Determine el valor óptimo de N (llámelo N^*) y q_i^*.

c Sea $EROQ_i$ el tamaño óptimo de corrida de producción para el producto i si se ignora la naturaleza cíclica del problema. Suponga que q_i^* es mucho menor que $EROQ_i$. ¿Qué conclusión de podría sacar?

d En qué circunstancias podría no ser deseable producir cada artículo durante cada ciclo. Cuál de los factores siguientes tendería a hacer indeseable producir el producto i durante cada ciclo: (1) La demanda es relativamente baja. (2) El costo de preparación es relativamente alto. (3) El costo de retención es relativamente alto.

BIBLIOGRAFÍA

En los siguientes libros se remarcan las aplicaciones sobre la teoría:

Brown, R. *Decision Rules for Inventory Management.* Nueva York: Holt, Rinehart y Winston, 1967.

Chopra, S., y P. Meindl. *Supply Chain Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 2001.

McLeavey, D. y S. Narasimhan. *Production Planning and Inventory Control.* Boston: Allyn y Bacon, 1985.

Peterson, R. y E. Silver. *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning.* Nueva York: Wiley, 1988.

Tersine, R. *Principles of Inventory and Materials Management.* Nueva York: North-Holland, 1982.

Vollman, T., W. Berry y C. Whybark. *Manufacturing Planning and Control Systems.* Homewood, Ill.: Irwin, 1998.

Zipkin, P. *Foundations of Inventory Management.* Nueva York: Irwin-McGraw-Hill 2000.

Los siguientes libros contienen explicaciones detalladas de la teoría de inventarios, así como de las aplicaciones:

Hadley, G. y T. Whitin. *Analysis of Inventory Systems.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1963.

Hax, A. y D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Johnson, L. y D. Montgomery. *Operations Research in Production, Planning, Scheduling, and Inventory Control.* Nueva York: Wiley, 1974.

Baumol, W. "The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach", *Quarterly Journal of Economics* 16(1952):545-556.

Ignall, E. y P. Kolesar. "Operating Characteristics of a Simple Shuttle under Local Dispatching Rules", *Operations Research* 20(1972):1077-1088.

Riccio, L., J. Miller y A. Little. "Polishing the Big Apple", Interfaces 16(no. 1, 1986):83-88.

Roundy, R. "98% Effective Integer Rate Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems", Management Science 31(1985):1416-1430.