13

Toma de decisiones bajo incertidumbre

Todos hemos tenido que tomar decisiones importantes en situaciones donde había incertidumbre acerca de los factores pertinentes para las decisiones.

El siguiente modelo abarca varios aspectos de la toma de decisiones en ausencia de certidumbre. Quien toma la decisión elige primero una acción a_i de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de acciones disponibles. Luego se observa el estado del mundo; con probabilidad p_j, se observa el estado del mundo como $s_j \in S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Si se elige la acción a_i y el estado del mundo es s_j, quien toma la decisión recibe una recompensa r_{ij}. Se hace referencia a este modelo como *toma de decisiones observando el estado del mundo.*

En este capítulo se presenta la teoría básica de la toma de decisiones bajo incertidumbre: el ampliamente usado modelo de utilidad de Von Neumann-Morgenstern y el empleo de árboles decisión para tomar decisiones en diferentes puntos del tiempo. Se concluye considerando la toma de decisiones con varios objetivos.

13.1 Criterios de decisión

En esta sección, se consideran cuatro criterios de decisión que se pueden usar para tomar decisiones bajo incertidumbre.

EJEMPLO 1 Vendedora de periódico

La vendedora Phyllis Pauley vende periódicos en la esquina de la avenida Kirkwood y la calle Indiana, y todos los días debe determinar cuántos periódicos pedir. Phyllis paga a la compañía 20¢ por cada ejemplar y los vende a 25¢ cada uno. Los periódicos que no se venden al terminar el día no tienen valor alguno. Phyllis sabe que cada día puede vender entre 6 y 10 ejemplares, cada uno con una posibilidad equiprobable. Demuestre cómo se ajusta este problema en el modelo del estado del mundo.

Solución En este ejemplo, los elementos de $S = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ son los valores posibles de la demanda diaria de periódicos. Se sabe que $p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = \frac{1}{5}$. Phyllis debe elegir una acción (el número de periódicos que debe ordenar cada día) de $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Si Phyllis compra i ejemplares y la demanda es de j, entonces se compran i ejemplares a un costo de $20i$¢, y min (i, j) periódicos se venden a 25¢ cada uno.[†] Así, si Phyllis compra i periódicos y se venden j, obtiene una ganancia neta de r_{ij}, donde

$$r_{ij} = 25i - 20i = 5i \qquad (i \le j)$$
$$r_{ij} = 25j - 20i \qquad (i \ge j)$$

Los valores de r_{ij} se tabulan en la tabla 1.

[†] $\min(i, j)$ es el más pequeño de i y j.

TABLA 1
Premios para la vendedora de periódicos

Ejemplares pedidos	Demanda de ejemplares 6	7	8	9	10
6	30¢	30¢	30¢	30¢	30¢
7	10¢	35¢	35¢	35¢	35¢
8	−10¢	15¢	40¢	40¢	40¢
9	−30¢	−5¢	20¢	45¢	45¢
10	−50¢	−25¢	0¢	25¢	50¢

Acciones dominadas

¿Por qué no se consideró la posibilidad de que Phyllis ordenaría 1, 2, 3, 4, 5 o más de 10 ejemplares? Contestar esta pregunta tiene que ver con la idea de una acción dominada.

DEFINICIÓN ■ Una acción a_i es **dominada** por una acción $a_{i'}$ si para toda $s_j \in S$, $r_{ij} \leq r_{i'j}$, y para algún estado $s_{j'}$, $r_{ij'} < r_{i'j'}$. ■

Si la acción a_i es dominada, entonces en ninguna situación del mundo a_i es mejor que $a_{i'}$ y en por lo menos una situación del mundo a_i es inferior a $a_{i'}$. Así, si la acción a_i es dominada, no hay razón para elegir a_i ($a_{i'}$ sería una mejor elección).

Si Phyllis ordena i periódicos ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), obtendrá (para todas las situaciones del mundo) una ganancia de $5i$¢. A partir de la tabla de premios, se observa que, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ordenar 6 periódicos domina a ordenar i periódicos ($j' = 6, 7, 8, 9$ o 10 será suficiente). De manera similar, el lector debe comprobar que ordenar i periódicos ($i > 11$) está dominado por ordenar 10 (véase el problema 3 al final de esta sección). Una comprobación rápida muestra que ninguna de las acciones en $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ está dominada. Así, Phyllis debe de hecho elegir su acción de $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ahora se analizan cuatro criterios que se pueden usar para elegir una acción.

Criterio maximin

Para cada acción, determine el peor resultado (premio más pequeño). El criterio maximin elige la acción con el "mejor" peor resultado.

DEFINICIÓN ■ El **criterio maximin** elige la acción a_i con el valor más grande de $\min_{j \in S} r_{ij}$. ■

Para el ejemplo 1, se obtienen los resultados de la tabla 2. Así, el criterio maximin recomienda ordenar 6 periódicos. Con esto se asegura que Phyllis, sin importar el estado del mundo, obtendrá una ganancia de por lo menos 30¢. El criterio maximin tiene que ver con hacer lo más placentero que se pueda el peor resultado posible. Infortunadamente, elegir una decisión para mitigar el peor caso podría evitar que quien toma la decisión aproveche la buena fortuna. Por ejemplo, si Phyllis sigue el criterio maximin, nunca obtendrá menos de 30¢, pero nunca hará más de 30¢.

TABLA 2
Cálculo de la decisión maximin para la vendedora de periódicos

Periódicos ordenados	Peor estado del mundo	Premio en el peor estado del mundo
6	6, 7, 8, 9, 10	30¢
7	6	10¢
8	6	−10¢
9	6	−30¢
10	6	−50¢

Criterio maximax

Para cada acción, determine el mejor resultado (mayor recompensa). El criterio maximax elige la acción con el mejor resultado.

DEFINICIÓN ■ El **criterio maximax** elige la acción a_i con el valor más grande de $\max_{j \in S} r_{ij}$. ■

Para el ejemplo 1, se obtienen los resultados de la tabla 3. Así, el criterio maximax recomendaría ordenar 10 periódicos. En la mejor situación (cuando la demanda sea de 10 ejemplares), esto produce una ganancia de 50¢. Por supuesto, tomar una decisión de acuerdo con el criterio maximax deja a Phyllis expuesta a la desastrosa posibilidad de que sólo se vendan 6 ejemplares, en cuyo caso pierde 50¢.

Arrepentimiento minimax

El criterio de arrepentimiento minimax (creación de L. J. Savage) utiliza el concepto de costo de oportunidad para llegar a una decisión. Para cada situación posible del mundo s_j, encuentre una acción $i^*(j)$ que maximiza a r_{ij}. Es decir, $i^*(j)$ es la mejor acción posible para elegir si el estado del mundo es en realidad s_j. Entonces para cualquier acción a_i y el estado s_j, la pérdida de oportunidad o arrepentimiento para a_i en s_j es $r_{i^*(j),j} - r_{ij}$. Por ejemplo, si la demanda de periódicos es $j = 7$, la mejor decisión es ordenar $i^*(7) = 7$ periódicos, produciendo una ganancia de $r_{77} = 7(25) - 7(20) = 35$¢. Suponga que se elige ordenar $i = 6$ periódicos. Puesto que $r_{67} = 6(25) - 6(20) = 30$¢, la pérdida de oportunidad o arrepentimiento para $i = 6$ y $j = 7$ es $35 - 30 = 5$¢. Así, si ordenamos 6 periódicos y la demanda es de 7, a posteriori se comprende que al hacer la elección óptima (ordenar 7 periódicos) para la situación real del mundo (7 periódicos requeridos), se habrían obtenido 5¢ más de lo que se obtendría ordenando 6 periódicos. En la tabla 4 se muestra la matriz de costo de oportunidad o de arrepentimiento para el ejemplo 1. El criterio de arrepentimiento

TABLA 3
Cálculo de la decisión maximax para la vendedora de periódicos

Periódicos ordenados	Situación que produce el mejor resultado	Mejor resultado
6	6, 7, 8, 9, 10	30¢
7	7, 8, 9, 10	35¢
8	8, 9, 10	40¢
9	9, 10	45¢
10	10	50¢

minimax elige una acción aplicando el criterio minimax a la matriz de arrepentimiento. En otras palabras, el criterio de arrepentimiento minimax intenta evitar la desilusión sobre lo que podría haber sido. De la matriz de arrepentimiento en la tabla 4, se obtiene la decisión de arrepentimiento minimax en la tabla 5. Así, el criterio de arrepentimiento minimax recomienda ordenar 6 o 7 periódicos.

Criterio del valor esperado

El criterio del valor esperado elige la acción que produce la recompensa esperada más grande. Para el ejemplo 1, el criterio del valor esperado recomendaría ordenar 6 o 7 periódicos (véase la tabla 6).

Los criterios de toma de decisiones analizados en esta sección podrían parecer razonables, pero muchas personas toman decisiones sin usar alguno de ellos. Un modelo más completo de toma de decisiones individuales, el modelo de utilidad de Von Neumann-Morgenstern (se analiza en la sección 13.2.)

TABLA 4
Matriz de arrepentimiento para la vendedora de periódicos

	Demanda de periódicos				
Periódicos pedidos	6	7	8	9	10
6	30 − 30 = 0¢	35 − 30 = 5¢	40 − 30 = 10¢	45 − 30 = 15¢	50 − 30 = 20¢
7	30 − 10 = 20¢	35 − 35 = 0¢	40 − 35 = 5¢	45 − 35 = 10¢	50 − 35 = 15¢
8	30 + 10 = 40¢	35 − 15 = 20¢	40 − 40 = 0¢	45 − 40 = 5¢	50 − 40 = 10¢
9	30 + 30 = 60¢	35 + 5 = 40¢	40 − 20 = 20¢	45 − 45 = 0¢	50 − 45 = 5¢
10	30 + 50 = 80¢	35 + 25 = 60¢	40 − 0 = 40¢	45 − 25 = 20¢	50 − 50 = 0¢

TABLA 5
Cálculo de decisión de arrepentimiento minimax para la vendedora de periódicos

Periódicos pedidos	Arrepentimiento máximo
6	20¢
7	20¢
8	40¢
9	60¢
10	80¢

TABLA 6
Cálculo de la decisión del valor esperado para la vendedora de periódicos

Periódicos ordenados	Recompensa esperada
6	$\frac{1}{5}(30 + 30 + 30 + 30 + 30) = 30$¢
7	$\frac{1}{5}(10 + 35 + 35 + 35 + 35) = 30$¢
8	$\frac{1}{5}(-10 + 15 + 40 + 40 + 40) = 25$¢
9	$\frac{1}{5}(-30 - 5 + 20 + 45 + 45) = 15$¢
10	$\frac{1}{5}(-50 - 25 + 0 + 25 + 50) = 0$¢

PROBLEMAS

Grupo A

1 Pizza King y Noble Greek son dos restaurantes contrarios. Cada uno debe determinar al mismo tiempo si emprende una campaña de publicidad pequeña mediana o grande. Pizza King cree que es igualmente probable que Noble Greek emprenda una campaña publicitaria pequeña, mediana o grande. Dependiendo de las acciones elegidas por cada restaurante, las ganancias de Pizza King se muestran en la tabla 7. Para los criterios de arrepentimiento maximin, maximax y minimax, determine la elección de campaña publicitaria de Pizza King.

TABLA 7

Opciones de Pizza King	Opciones de Noble Greek: Pequeña	Mediana	Grande
Pequeña	\$6,000	\$5,000	\$2,000
Mediana	\$5,000	\$6,000	\$1,000
Grande	\$9,000	\$6,000	\$0

2 Sodaco está considerando producir un nuevo producto: gaseosa Chocovan. Sodaco estima que la demanda anual para Chocovan, **D** (en miles de cajas), tiene la siguiente función de masa: $P(\mathbf{D} = 30) = .30$, $P(\mathbf{D} = 50) = .40$, $P(\mathbf{D} = 80) = .30$. Cada caja de Chocovan se vende en 5 dólares y se incurre en un costo variable de 3 dólares. Cuesta 800 000 dólares construir una planta para producir Chocovan. Suponga que si se recibe 1 dólar cada año (por siempre), esto es equivalente a recibir 10 dólares al tiempo actual. Considerando la recompensa para cada acción y el estado del mundo en términos del valor presente neto, use cada criterio de decisión de esta sección para determinar si Sodaco debe construir la planta.

3 Para el ejemplo 1, muestre que ordenar 11 o más periódicos está dominado por ordenar 10 periódicos.

Grupo B

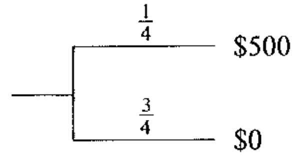
4 Suponga que Pizza King y Noble Greek dejan de anunciarse pero deben determinar el precio que deben cargar para cada pizza vendida. Pizza King considera que el precio de Noble Greek es una variable aleatoria **D** que tiene la siguiente función de masa. $P(\mathbf{D} = \$6) = .25$, $P(\mathbf{D} = \$8) = .50$, $P(\mathbf{D} = \$10) = .25$. Si Pizza King carga un precio p_1 y Noble Greek carga un precio p_2, Pizza King venderá $100 + 25(p_2 - p_1)$ pizzas. A Pizza King le cuesta 4 dólares hacer una pizza. Pizza King está considerando cargar 5, 6, 7, 8 o 9 dólares por pizza. Aplique cada criterio de decisión de esta sección para determinar el precio que debe cargar Pizza King.

5 Alden Construction lleva a cabo una licitación a fin de competir con Forbes Construction por un proyecto. Alden cree que la oferta de Forbes es una variable aleatoria **B** con la siguiente función de masa: $P(\mathbf{B} = \$6{,}000) = .40$, $P(\mathbf{B} = \$8\,000) = .30$, $P(\mathbf{B} = \$11\,000) = .30$. A Alden le cuesta 6 000 dólares completar el proyecto. Use cada uno de los criterios de decisión de esta sección para determinar la oferta de Alden. Suponga que en caso de un empate, Alden gana la licitación. (*Sugerencia*: sea p = oferta de Alden. Para $p \leq 6\,000$, $6\,000 < p \leq 8\,000$, $8\,000 < p \leq 11\,000$ y $p > 11\,000$, determine la ganancia de Alden en términos de la oferta de Alden y la oferta de Forbes.)

13.2 Teoría de la utilidad

Ahora se muestra cómo se puede usar el concepto de Von Neumann-Morgenstern de una función de utilidad como auxiliar en la toma de decisiones bajo incertidumbre.

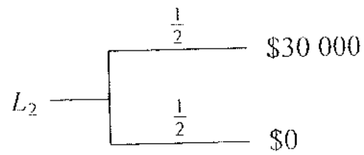
Considere una situación en la que una persona recibirá, para $i = 1, 2, \ldots, n$, una recompensa r_i con probabilidad p_i. Esto se denota como la **lotería** $(p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$. Una lotería suele representarse mediante un árbol en el que cada rama representa un resultado posible de la lotería, y el número en cada rama representa la probabilidad de que ocurrirá el resultado. Así, la lotería $(\frac{1}{4}, \$500; \frac{3}{4}, \$0)$ se podría denotar por



Suponga que se pide elegir entre dos loterías (L_1 y L_2). Con certeza, la lotería L_1 produce \$10 000:

$$L_1 \xrightarrow{\quad 1 \quad} \$10\,000$$

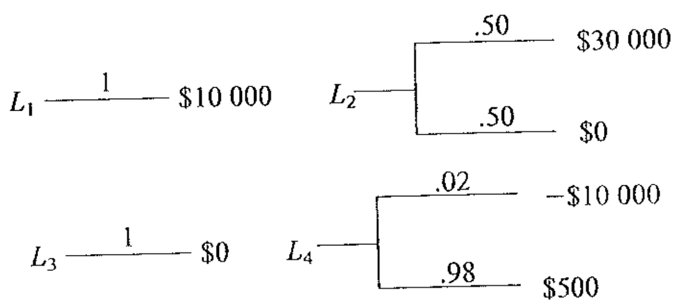
La lotería 2 consiste en lanzar una moneda. Si el resultado es cara, se reciben \$30 000, y si sale cruz se reciben \$0:



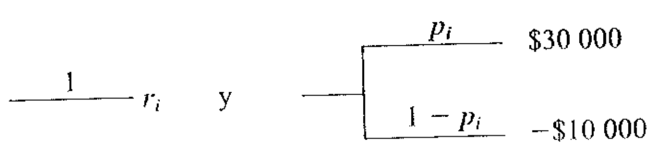
L_1 produce una recompensa esperada de \$10 000 y L_2 da una recompensa de $(\frac{1}{2})(30\,000) + (\frac{1}{2})(0) = \$15\,000$. Aunque L_2 tiene un valor esperado más grande que L_1, la mayoría de las personas prefieren L_1 a L_2 porque L_1 ofrece la certeza de un pago relativamente grande, en tanto que L_2 produce un cambio sustancial $(\frac{1}{2})$ de obtener una recompensa de \$0. En resumen, la mayoría de las personas prefieren L_1 a L_2 porque L_1 tiene menos riesgo que (o incertidumbre) que L_2.

El objetivo es determinar un método que pueda usar una persona para elegir entre loterías. Suponga que una persona debe elegir entre L_1 o L_2. Se escribe $L_1 \text{p} L_2$ si la persona prefiere L_1. Se escribe $L_1 \text{i} L_2$ si la persona no tiene preferencia entre elegir L_1 y L_2. Si $L_1 \text{i} L_2$, se dice que L_1 y L_2 son **loterías equivalentes**. Por último, se escribe $L_2 \text{p} L_1$ si quien toma la decisión prefiere L_2.

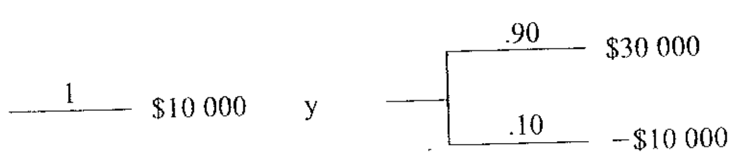
Suponga que se pide a una persona que toma decisiones clasificar las siguientes loterías:



El método de Von Neumann-Morgenstern para clasificar estas loterías es como sigue. Comience por identificar los resultados más favorable (\$30 000) y el menos favorable (−\$10 000) que pueden ocurrir. Para los otros resultados posibles ($r_1 = \$10\,000$, $r_2 = \$500$ y $r_3 = \$0$), se pide a quien toma la decisión que determine la probabilidad p_i tal que no tenga preferencia entre dos loterías:

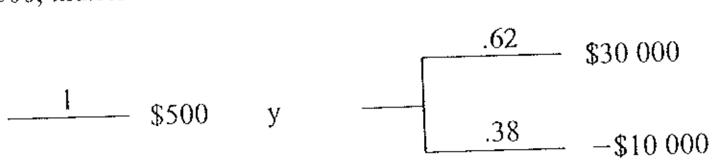


Suponga que para $r_1 = \$10\,000$, quien toma la decisión es indiferente entre



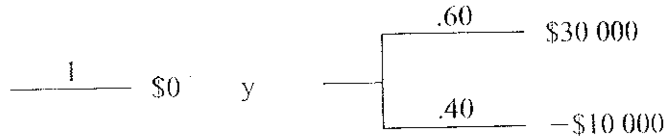
(1)

y para $r_2 = \$500$, indiferente entre



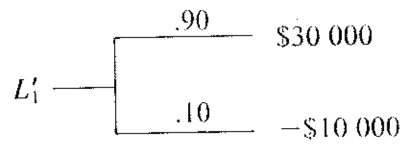
(2)

y para $r_3 = \$0$, indiferente entre

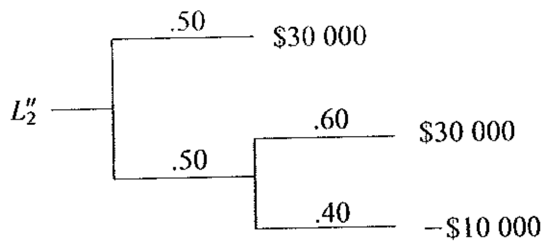


(3)

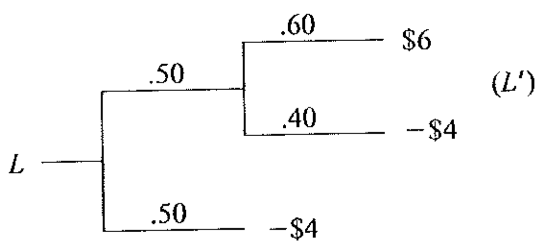
Usando (1) a (3), quien toma la decisión construye loterías L_1', L_2', L_3' y L_4' tal que L_i'iL_i y cada L_i' sólo tiene que ver con el mejor resultado posible (\$30 000) y el peor (−\$10 000). Así, de (1), se encuentra que L_1iL_1', donde



De (3), se encuentra que L_2iL_2'', donde

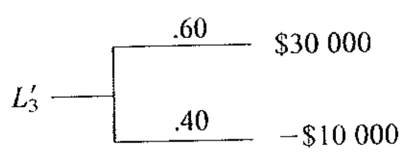


L_2'' es una lotería compuesta en la que con probabilidad 0.50 se reciben \$30 000 y con probabilidad .50 se juega una lotería que produce .60 de posibilidad en \$30 000 y .40 en −\$10 000. De manera más formal, una lotería L es una **lotería compuesta** si para alguna i, hay una probabilidad p_i de que la recompensa de quien toma la decisión sea jugar otra lotería L'. A continuación se da un ejemplo de una lotería compuesta:

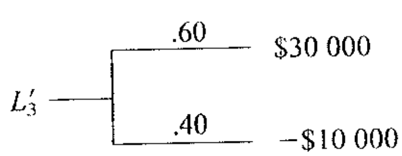


Así, con probabilidad .50, L produce una recompensa de −\$4 y con probabilidad .50, L causa que se juegue L'. Si una lotería no es compuesta, se trata de una **lotería simple.**

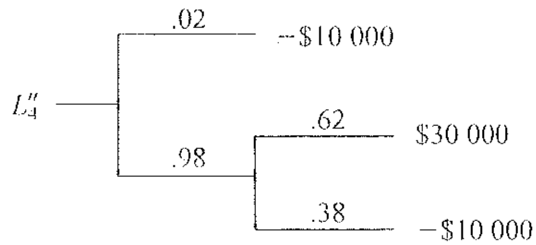
De regreso al análisis de L_2'', se observa que L_2'' es una lotería que produce $.50 + .50(.60) = .80$ de posibilidad en \$30 000 y una de $.40(.50) = .20$ en −\$10 000. Así, L_2iL_2''iL_2', donde



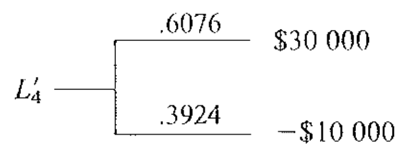
De manera similar, usando (3), se encuentra que L_3iL_3', donde



Usando (2), se encuentra que quien toma la decisión no tiene preferencia entre L_4 y L_4'', donde

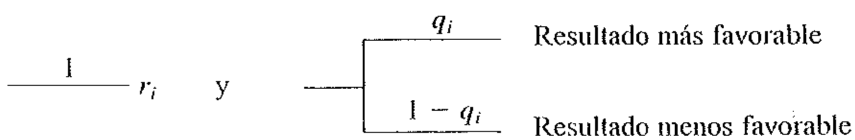


En realidad, sin embargo, L_4'' da una posibilidad de .98(.62) = .6076 en \$30 000 y una de .02 + .38(.98) = .3924 en $-\$10\,000$. Así, $L_4 \mathrm{i} L_4'' \mathrm{i} L_4'$, donde



Puesto que $L_i \mathrm{i} L_i'$, se podría clasificar L_1, L_2, L_3 y L_4 al clasificar L_1', L_2', L_3' y L_4'. Considere dos loterías cuyos únicos resultados posibles son \$30 000 (el más favorable) y $-\$10\,000$ (el menos favorable). Si a la persona se le da a elegir entre dos loterías de este tipo, al tomar la decisión simplemente elige la lotería con la mayor posibilidad de recibir el resultado más favorable. Aplicando esta idea desde L_1' hasta L_4' se obtiene $L_1' \mathrm{p} L_2' \mathrm{p} L_4' \mathrm{p} L_3'$. Puesto que $L_i \mathrm{i} L_i'$, se podría concluir que $L_1 \mathrm{p} L_2 \mathrm{p} L_4 \mathrm{p} L_3$.

Ahora se da una descripción más formal del proceso que se utilizó para clasificar L_1, L_2, L_3 y L_4. La **utilidad** de la recompensa r_i, escrita $u(r_i)$, es el número q_i tal que quien toma la decisión es indiferente en las siguientes dos loterías:



Esta definición fuerza a que u(resultado menos favorable) = 0 y u(resultado más favorable) = 1. Para los pagos posibles de \$30 000, $-\$10\,000$, \$0, \$500 y \$10 000, primero se encuentra que $u(\$30\,000) = 1$ y $u(-\$10\,000) = 0$. Entonces (1)−(3) producen $u(\$10\,000) = .90$, $u(\$500) = .62$ y $u(\$0) = .60$. La especificación de $u(r_i)$ para las recompensas r_i se llama la **función de utilidad** de quien toma la decisión.

Para una lotería determinada $L = (p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$, defina la utilidad esperada de la lotería L, escrita $E(U \text{ para } L)$, por

$$E(U \text{ para } L) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i u(r_i)$$

Así, en nuestro ejemplo

$$E(U \text{ para } L_1) = 1(.90) = .90$$
$$E(U \text{ para } L_2) = .50(1) + .50(.60) = .80$$
$$E(U \text{ para } L_3) = 1(.60) = .60$$
$$E(U \text{ para } L_4) = .02(0) + .98(.62) = .6076$$

Recuerde que se encontró que $L_i \mathrm{i} L_i'$, donde L_i' produjo una probabilidad $E(U \text{ para } L_i)$ en \$30 000 y una probabilidad $1 - E(U \text{ para } L_i)$ en $-10\,000$. Así, al elegir entre las loterías

L_1', L_2', L_3' y L_4' (o en forma equivalente, L_1, L_2, L_3 y L_4), simplemente se elige la lotería con la utilidad esperada más grande. Dadas dos loterías L_1 y L_2, se podría elegir entre ellas vía los criterios de la utilidad esperada:

$L_1 \text{p} L_2$	si y sólo si	$E(U \text{ para } L_1) > E(U \text{ para } L_2)$
$L_2 \text{p} L_1$	si y sólo si	$E(U \text{ para } L_2) > E(U \text{ para } L_1)$
$L_1 \text{i} L_2$	si y sólo si	$E(U \text{ para } L_2) = E(U \text{ para } L_1)$

Axiomas de Von Neumann-Morgenstern

Von Neumann y Morgenstern demostraron que si las preferencias de una persona satisfacen los axiomas siguientes, entonces debe elegir entre loterías usando el criterio de la utilidad esperada.

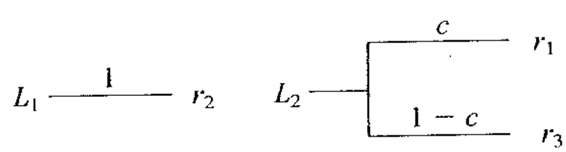
Axioma 1: axioma de ordenación completa

Para dos recompensas r_1 y r_2, uno de los siguientes enunciados debe ser cierto: la persona que toma la decisión (1) prefiere r_1 a r_2 (2) prefiere r_2 a r_1 o (3) es indiferente entre r_1 y r_2. También, si la persona prefiere r_1 a r_2 y r_2 a r_3, entonces debe preferir r_1 a r_3 (transitividad de preferencias).

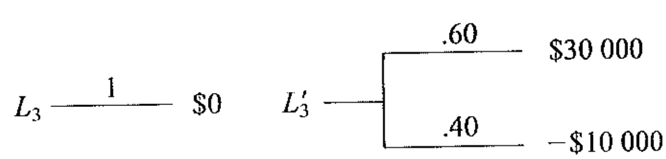
En nuestro análisis, utilizamos el axioma de ordenación completa para determinar los resultados más y menos favorables.

Axioma 2: axioma de continuidad

Si la persona que toma la decisión prefiere r_1 a r_2 y r_2 a r_3, entonces para alguna $c(0 < c < 1)$, $L_1 \text{i} L_2$, donde

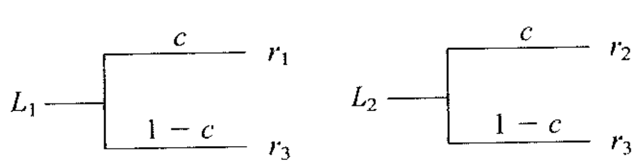


En nuestro análisis informal, utilizamos el axioma de continuidad cuando se encontró, por ejemplo, que $L_3 \text{i} L_3'$, donde

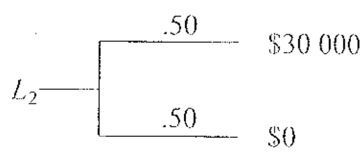


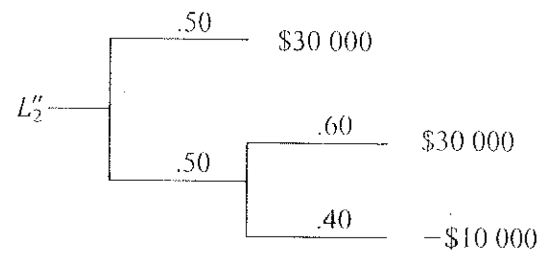
Axioma 3: axioma de independencia

Suponga que quien toma la decisión no tiene preferencia entre las recompensas r_1 y r_2. Sea r_3 cualquier otra recompensa. Entonces para cualquier c $(0 < c < 1)$, $L_1 \text{i} L_2$, donde



L_1 y L_2 difieren sólo en que L_1 tiene una probabilidad c de producir una recompensa r_1, en tanto que L_2 tiene una probabilidad c de producir una recompensa r_2. Así, el axioma de independencia implica que quien toma la decisión ve una probabilidad c en r_1 y una probabilidad c en r_2 como un valor idéntico y esta perspectiva se cumple para los valores de c y r_3. Se aplica el axioma de independencia cuando se usa (3) para afirmar que $L_2 i L_2''$, donde





Axioma 4: axioma de probabilidad desigual

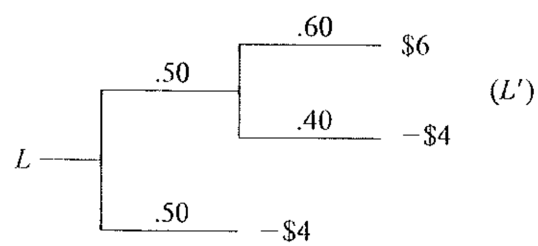
Suponga que la persona que toma la decisión prefiere la recompensa r_1 en vez de la recompensa r_2. Si las dos loterías tienen sólo r_1 y r_2 como sus resultados posibles, la persona prefiere la lotería con la mayor probabilidad de obtener r_1.

Se utiliza el axioma de probabilidad desigual cuando se concluye, por ejemplo, que se prefiere L_1' en vez de L_2' (debido a que L_1' tenía una probabilidad de .90 en $30 000 y L_2' tenía sólo una probabilidad de .80 en $30 000).

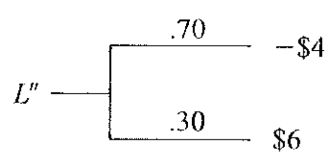
Axioma 5: axioma de lotería compuesta

Suponga que cuando se consideran todos los resultados posibles, una lotería compuesta L produce (para $i = 1, 2, \ldots, n$) una probabilidad p_i de recibir una recompensa r_i. Entonces $L i L'$, donde L' es la lotería simple $(p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$.

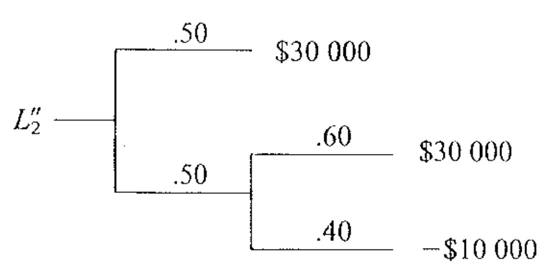
Por ejemplo, considere la siguiente lotería compuesta:



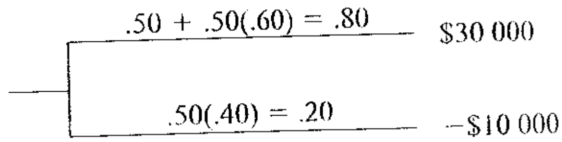
L produce una probabilidad de $.50 + .50(.40) = .70$ en −$4 y una probabilidad de $.50(.60) = .30$ en $6. Así, $L i L''$, donde



En nuestro análisis formal, usamos el axioma de lotería compuesta, por ejemplo, se expresó que el equivalente compuesto de L_2 (L_2'')



era equivalente a la siguiente lotería simple:



Por qué se podría suponer que u(peor resultado) = 0 y u(mejor resultado) = 1

Hasta ahora, se ha supuesto que u(resultado menos favorable) = 0 y u(resultado más favorable) = 1. Aun si la función de utilidad de quien toma la decisión no tiene estos valores, se puede transformar su función de utilidad (sin cambiar las preferencias entre loterías) en una función de utilidad que tiene u(resultado menos favorable) = 0 y u(resultado más favorable) = 1.

LEMA 1

Dada una función de utilidad $u(x)$, defina para cualquier $a > 0$ y cualquier b la función $v(x) = au(x) + b$. Dadas dos loterías cualesquiera L_1 y L_2, será el caso que

1 Quien toma la decisión y usa $u(x)$ como su función de utilidad tiene $L_1 \text{p} L_2$ si y sólo si quien toma la decisión usando $v(x)$ como su función de utilidad tiene $L_1 \text{p} L_2$.

2 Quien toma la decisión y usa $u(x)$ como su función de utilidad tiene $L_1 \text{i} L_2$ si y sólo si quien toma la decisión usando $v(x)$ como su función de utilidad tiene $L_1 \text{i} L_2$.

Demostración Sea

$$L_1 = (p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots ; p_n, r_n)$$
$$L_2 = (p'_1, r'_1; p'_2, r'_2; \ldots ; p'_m, r'_m)$$

Suponga que quien toma la decisión usando $u(x)$ prefiere L_1 a L_2. Entonces por el criterio de la utilidad esperada, se sabe que

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i u(r_i) > \sum_{i=1}^{i=m} p'_i u(r'_i) \tag{4}$$

Ahora quien toma la decisión y usa $v(x)$ tendrá $L_1 \text{p} L_2$ si

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i[au(r_i) + b] > \sum_{i=1}^{i=m} p'_i[au(r'_i) + b] \tag{5}$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = \sum_{i=1}^{i=m} p'_i = 1$$

(5) se simplifica a

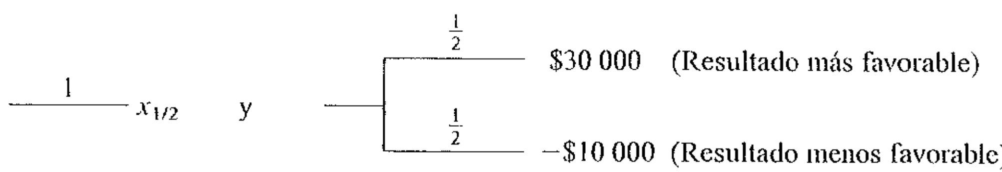
$$a\sum_{i=1}^{i=n} p_i u(r_i) + b > a\sum_{i=1}^{i=m} p'_i u(r'_i) + b \tag{6}$$

Puesto que $a > 0$, (6) se deduce de (4). Así, si quien toma la decisión usando $u(x)$ tiene $L_1 \text{p} L_2$, quien toma la decisión usando $v(x)$ tiene $L_1 \text{p} L_2$. De manera similar, si (6) se cumple, entonces se cumplirá (4). Así, si quien toma la decisión usando $v(x)$ tiene $L_1 \text{p} L_2$, quien toma la decisión usando $u(x)$ tendrá también $L_1 \text{p} L_2$. Se puede usar un argumento similar para demostrar la parte (2) del lema 1.

Usando el lema 1, se puede demostrar que sin cambiar la forma cómo un individuo clasifica las loterías, se puede transformar la función de utilidad de quien toma la decisión en una con u(resultado menos favorable) = 0 y u(resultado más favorable) = 1. Como ilustración, volvamos a considerar la clasificación de las loterías L_1 a L_4. Suponga que la función de utilidad de quien toma la decisión tuvo $u(-\$10\,000) = -5$ y $u(\$30\,000) = 10$. Defina $v(x) = au(x) + b$. Elija a y b de modo que $v(\$30\,000) = 10a + b = 1$ y $v(-\$10\,000) = -5a + b = 0$. Entonces $a = \frac{1}{15}$ y $b = \frac{1}{3}$. Entonces por el lema 1, la función de utilidad $v(x) = \frac{u(x)}{15} + \frac{1}{3}$ producirá la misma clasificación de loterías que $u(x)$ y se habrá construido $v(x)$ de modo que $v(\$30\,000) = 1$ y $v(-\$10\,000) = 0$. Así, se ve que sin pérdida de generalidad, se podría suponer que u(resultado menos favorable) = 0 y u(resultado más favorable) = 1.

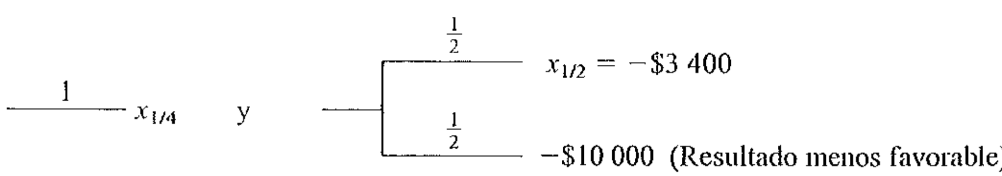
Estimación de una función de utilidad individual

¿Cómo se podría estimar la función de utilidad de una persona (llámela Jill)? Se empieza por suponer que el resultado menos favorable (digamos, $-\$10\,000$) tiene una utilidad de 0 y que el resultado más favorable (por ejemplo, \$30 000) tiene una utilidad de 1. A continuación se define un número $x_{1/2}$ que tiene $u(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$. Para determinar $x_{1/2}$, pida a Jill el número (llámelo $x_{1/2}$) que le hace ser indiferente entre



Puesto que Jill es indiferente entre las dos loterías, deben tener la misma utilidad esperada. Así, $u(x_{1/2}) = (\frac{1}{2})(1) + (\frac{1}{2})(0) = \frac{1}{2}$.

Este procedimiento produce un punto $x_{1/2}$ que tiene $u(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$. Suponga que Jill expresa que $x_{1/2} = -\$3\,400$. Con $x_{1/2}$ y el resultado menos favorable ($-\$10\,000$) como resultados posibles, se puede construir una lotería que se utiliza para determinar el punto $x_{1/4}$ que tiene una utilidad de $\frac{1}{4}$ (es decir, $u(x_{1/4}) = \frac{1}{4}$). El punto $x_{1/4}$ debe ser tal que Jill es indiferente entre



Entonces $u(x_{1/4}) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(0) = \frac{1}{4}$. Así, $x_{1/4}$ cumplirá con $u(x_{1/4}) = \frac{1}{4}$. Suponga que Jill expresa que $x_{1/4} = -\$8\,000$. Con esto se obtiene otro punto en la función de utilidad de Jill.

Jill ahora puede usar los resultados $x_{1/2}$ y \$30 000 para construir una lotería que producirá un valor $x_{3/4}$ igual a $u(x_{3/4}) = \frac{3}{4}$. (¿Cómo?) Suponga que $x_{3/4} = \$8\,000$. De manera similar, los resultados de $x_{1/4}$ y $-\$10\,000$ se pueden usar para construir una lotería que producirá un valor $x_{1/8}$ igual a $u(x_{1/8}) = \frac{1}{8}$. Ahora la función de utilidad de Jill se puede aproximar trazando una curva (exponencialmente suave, esperamos) que una los puntos

$$(-\$10\,000, 0), (x_{1/8}, 1/8), (x_{1/4}, 1/4), \ldots, (\$30\,000, 1)$$

Este resultado se muestra en la figura 1. Infortunadamente, si las preferencias de quien toma la decisión viola alguno de los axiomas precedentes (como la transitividad), es posible que este procedimiento no produzca una curva exponencial suave. Si esto no produce una curva relativamente exponencialmente suave, se deben usar procedimientos más complejos para evaluar las funciones de utilidad que deben usarse (véanse Keeney y Raiffa (1976)).

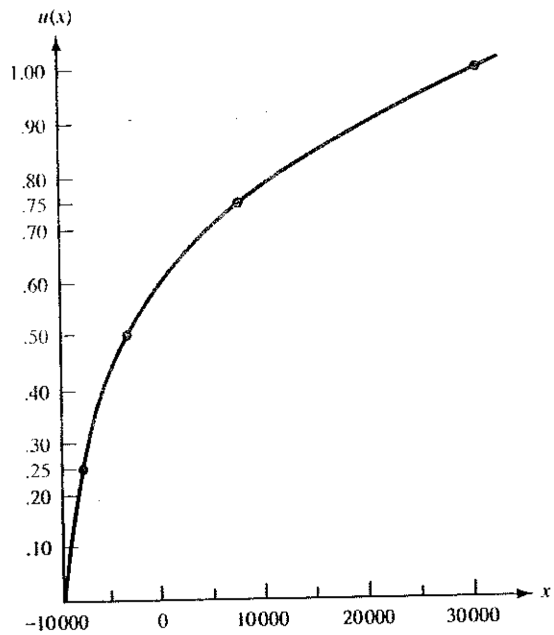


FIGURA 1
Función de utilidad de Jill

Relación entre la función de utilidad de un individuo y su actitud hacia el riesgo

La función de utilidad de quien toma la decisión contiene información acerca de su actitud hacia el riesgo. Para analizar esta información, es necesario definir los conceptos de equivalente de certidumbre y premio de riesgo de una lotería.

DEFINICIÓN ■ El **equivalente de certidumbre** de una lotería L, escrito como $EC(L)$, es el número $EC(L)$ tal que quien toma la decisión es indiferente entre la lotería L y recibir un cierto pago de $EC(L)$. ■

Por ejemplo, ya se vio que Jill era indiferente entre

1 —— −\$3 400 y L —— $\frac{1}{2}$ \$30 000 ; $\frac{1}{2}$ −\$10 000

Así, $EC(L) = -\$3\,400$.

DEFINICIÓN ■ El **premio de riesgo** de una lotería L, escrito como $PR(L)$ está dado por $PR(L) = VE(L) - EC(L)$, donde $VE(L)$ es el valor esperado de los resultados de la lotería. ■

Por ejemplo,

L —— $\frac{1}{2}$ \$30 000 ; $\frac{1}{2}$ −\$10 000 entonces $VE(L) = (\frac{1}{2})(\$30\,000) + (\frac{1}{2})(-\$10\,000) = \$10\,000$. Ya se ha visto que $EC(L) = -\$3400$. Así, $PR(L) = 10\,000 - (-3400) = \$13\,400$; Jill evalúa L en \$13 400 menos de su valor esperado, debido a que no le gusta el grado mayor de incertidumbre que está asociado con la recompensa producida por L.

Sea una **lotería no degenerada** en la que puede ocurrir más de un resultado. Con respecto a la actitud hacia el riesgo, quien toma la decisión es

1 **Adverso al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) > 0$

2 **Neutral al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) = 0$

3 **Buscador de riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) < 0$

La actitud de un individuo hacia el riesgo depende de la concavidad (o convexidad) de su función de utilidad.

DEFINICIÓN ■ Se dice que una función $u(x)$ es **estrictamente cóncava** (o **estrictamente convexa**) si para dos puntos cualesquiera en la curva $y = u(x)$, el segmento de línea que une esos dos puntos queda por completo (con excepción de sus puntos finales) abajo (o arriba) de la curva $y = u(x)$. ■

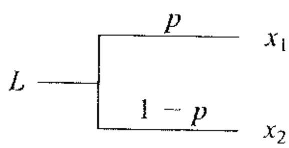
Si $u(x)$ es diferenciable, entonces $u(x)$ será estrictamente cóncava si y sólo si $u''(x) < 0$ para toda x y $u(x)$ será estrictamente convexa si y sólo si $u''(x) > 0$ para toda x. Es fácil demostrar que quien toma la decisión con una función de utilidad $u(x)$ es

1 **Adverso al riesgo** si y sólo si $u(x)$ es estrictamente cóncava

2 **Neutral al riesgo** si y sólo si $u(x)$ es una función lineal (si $u(x)$ es convexa y cóncava)

3 **Buscador de riesgo** si y sólo si $u(x)$ es estrictamente convexa

Para ilustrar estas definiciones, se muestra que una persona que toma una decisión con una función de utilidad cóncava $u(x)$ exhibe comportamiento adverso al riesgo (tiene $PR(L) > 0$). Considere una lotería binaria L (una lotería con sólo dos resultados posibles):



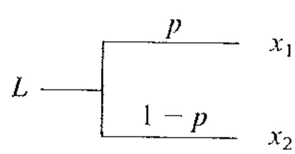
(Suponga que $x_1 < x_2$)

Suponga que $u(x)$ es estrictamente cóncava. Entonces, de la figura 2, se ve que

$$E(U \text{ para } L) = p\,u(x_1) + (1 - p)u(x_2) = \text{coordenada } y \text{ del punto } 1$$

Puesto que $EC(L)$ es el valor x^* que tiene $u(x^*) = E(U$ para $L)$, la figura 2 muestra que $EC(L) < VE(L)$, así que $PR(L) > 0$. Esto se deduce porque la concavidad estricta de $u(x)$ implica que el segmento de línea que une los puntos $(x_1, u(x_1))$ y $(x_2, u(x_2))$ queda debajo de la curva $u(x)$.

También se puede dar una demostración algebraica de que $u(x)$ estrictamente cóncava implica que $PR(L) = VE(L) - EC(L) > 0$. Recuerde que para



$VE(L) = px_1 + (1 - p)x_2$. Ahora la concavidad estricta de $u(x)$ implica que $u\,[px_1 + (1 - p)x_2] > pu(x_1) + (1 - p)u(x_2) = E(U$ para $L)$. Así que quien toma la decisión prefiere $px_1 + (1 - p)x_2 = VE(L)$ con certeza para el prospecto de jugar L. El equivalente de certidumbre

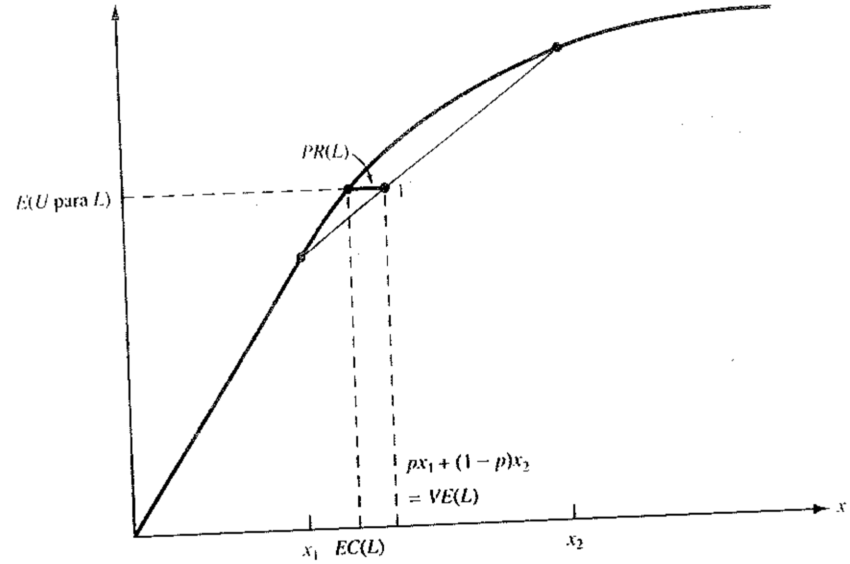


FIGURA 2
Por qué una función de utilidad cóncava implica un comportamiento adverso al riesgo

de L debe ser menor que $px_1 + (1-p)x_2 = VE(L)$. Esto implica que $PR(L) = VE(L) - EC(L) > 0$, y quien toma la decisión exhibe comportamiento adverso al riesgo. En el problema 4 al final de esta sección, se pide al lector que demuestre que si $u(x)$ es estrictamente convexa, quien toma la decisión exhibe comportamiento que busca el riesgo.

Si quien toma la decisión es neutral al riesgo (es decir, $u(x) = ax + b$), elige entre loterías vía el criterio de recompensa esperada de la sección 13.1 (véase el problema 5 al final de esta sección). Así, al clasificar las loterías, la persona que toma la decisión y el neutral al riesgo considera sólo el valor esperado (y no el riesgo) de las loterías.

En el ejemplo 2 se ilustran los conceptos de premio al riesgo, equivalente de certidumbre y aversión al riesgo.

EJEMPLO 2 Activos de Joan

La función de utilidad de Joan para su posición de activos x está dada por $u(x) = x^{1/2}$. En la actualidad los activos de Joan consisten en 10 000 dólares en efectivo y una casa con valor de 90 000 dólares. Durante un determinado año, hay una probabilidad de .001 de que la casa de Joan sea destruida por un incendio u otras causas. ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar Joan por una póliza de seguro que le retribuiría su casa si ésta fuera destruida?

Solución Sea x = prima anual del seguro. Luego, Joan debe elegir entre las siguientes loterías:

	Probabilidad	**Posición del activo**
L_1: comprar el seguro	1	(\$100 000 − x)
L_2: no comprar el seguro	.001	\$100 000 − \$90 000 = \$10 000
	.999	\$100 000

Joan preferiría L_1 a L_2 si la utilidad esperada de L_1 excede la utilidad esperada de L_2. Así, $L_1 \mathrm{p} L_2$ si y sólo si

$$
\begin{aligned}
(100\,000 - x)^{1/2} &> .001(10\,000)^{1/2} + .999(100\,000)^{1/2} \\
&> .10 + 315.91154 \\
&> 316.01154
\end{aligned}
$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la última desigualdad se encuentra que $L_1 \text{p} L_2$ si y sólo si

$$100\,000 - x > (316.01154)^2$$
$$x < \$136.71$$

Así, Joan pagaría hasta \$136.71 por el seguro. Por supuesto, si $p = \$136.71$, $L_1 \text{i} L_2$.

Calculemos la prima de riesgo para L_2:

$$VE(L_2) = .001(10\,000) + .999(100\,000) = \$99\,910$$

(una pérdida esperada de $100\,000 - 99\,910 = \$90$). Puesto que $E(U$ para $L_2) = 316.01154$, se puede encontrar $EC(L_2)$ a partir de la relación $u(EC(L_2)) = 316.01154$, o bien, $[EC(L_2)]^{1/2} = 316.01154$. Así, $EC(L_2) = (316.01154)^2 = \$99\,863.29$, y

$$PR(L_2) = VE(L_2) - EC(L_2) = 99\,910 - 99\,863.29 = \$46.71$$

Por lo tanto, Joan está dispuesta a pagar un seguro anual para su casa de \$46.71 más la pérdida esperada de \$90. (Recuerde que Joan está dispuesta a pagar hasta $90 + 46.71 = \$136.71$ para evitar el riesgo que tiene que ver con la destrucción de su casa.) Joan muestra una conducta de aversión al riesgo ($PR(L_2) > 0$). Puesto que

$$u''(x) = \frac{-x^{-3/2}}{4} < 0$$

$u(x)$ es estrictamente cóncava y $PR(L) > 0$ se cumpliría para cualquier lotería no degenerada.

En realidad, muchas personas exhiben tanto conducta de búsqueda de riesgo (compran billetes de lotería, van a Las Vegas) y comportamiento de aversión al riesgo (compran seguros de casa). Una persona cuya función de utilidad contiene tanto segmentos convexos como cóncavos podría exhibir tanto comportamiento de aversión al riesgo como de búsqueda de riesgo. Considere una persona que toma una decisión cuya función de utilidad $u(x)$ para el cambio en la posición actual del activo se da en la figura 3. Si está obligada a elegir entre

$$L_1 \xrightarrow{\;1\;} 0 \qquad \text{y} \qquad L_2 \begin{cases} \xrightarrow{.10} \$2\,500 \\ \xrightarrow{.90} -\$300 \end{cases}$$

¿qué haría esta persona?

De la figura 3, se encuentra que $u(0) = .20$, $u(2\,500) = .50$, y $u(-300) = .18$. Así, $E(U$ para $L_1) = .20$ y $E(U$ para $L_2) = .10(.50) + .90(.18) = .212$. Así, $L_2 \text{p} L_1$. Esto significa que L_2 tiene equivalente de certidumbre de por lo menos \$0. Puesto que $VE(L_2) = -\$20$, esto implica que $PR(L_2) = VE(L_2) - EC(L_2) < 0$. Quien toma la decisión exhibe comportamiento de búsqueda de riesgo en esta situación, porque para cambios en la posición del activo entre \$0 y \$2 500, $u(x)$ es una función convexa.

Ahora suponga que quien toma la decisión puede, por \$200, asegurarse a sí mismo contra una pérdida de \$2 000, lo cual ocurre con probabilidad .08. Entonces debe elegir entre

$$L_3 \xrightarrow{\;1\;} -\$200 \qquad \text{y} \qquad L_4 \begin{cases} \xrightarrow{.08} -\$2\,000 \\ \xrightarrow{.92} \$0 \end{cases}$$

De la figura 3, $u(-200) = .19$, $u(0) = .20$, y $u(-2\,000) = 0$. Así, $E(U$ para $L_2) = .19$ y $E(U$ para $L_4) = .80(0) + .92(.20) = .184$ y $L_3 \text{p} L_4$. Esto muestra que $EC(L_4) < -\$200$. Puesto que $VE(L_4) = .08(-2\,000) + .92(0) = -\$160$, $PR(L_4) = VE(L_4) - EC(L_4) > 0$ y quien toma la decisión está exhibiendo conducta de aversión al riesgo, porque $u(x)$ es cóncava para $-2\,000 < x < 0$. Así, si su función de utilidad tiene tanto segmentos convexos como cóncavos, una persona puede exhibir comportamiento de búsqueda de riesgo y de aversión al riesgo.

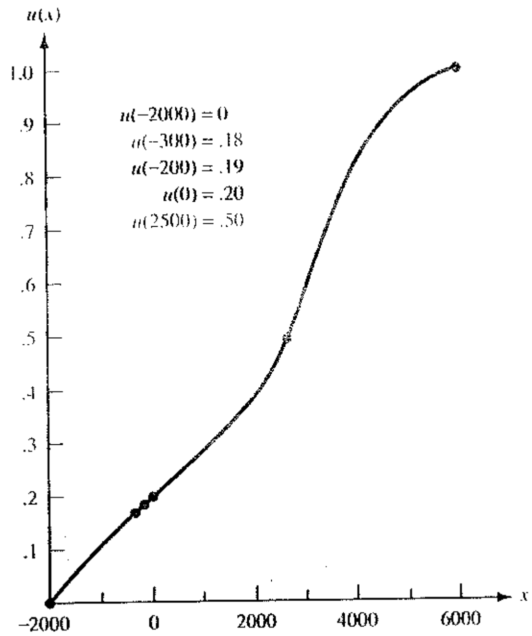


FIGURA 3
Una función de utilidad que exhibe comportamiento de búsqueda de riesgo como de aversión al riesgo

Utilidad exponencial

Se han elaborado clases de funciones de utilidad "prefabricadas". Una clase importante se llama **utilidad exponencial** y se ha usado en muchos análisis de inversión financieros. Una función de utilidad exponencial tiene sólo un parámetro numérico ajustable, y hay formas directas para descubrir el valor más apropiado de este parámetro para un individuo o compañía particular. Así que la ventaja de usar una función de utilidad exponencial es que evaluarla es relativamente fácil. La desventaja radica en que las funciones de utilidad exponenciales no captan todos los tipos de actitudes hacia el riesgo. Sin embargo, su facilidad de uso las ha hecho populares.

Una función de utilidad exponencial tiene la forma siguiente:

$$U(x) = 1 - e^{-x/R}$$

Aquí, x es un valor monetario (un pago si es positiva, un costo si es negativa), $U(x)$ es la utilidad de este valor y $R > 0$ es un parámetro ajustable llamado **tolerancia de riesgo.** En esencia, la tolerancia de riesgo mide cuánto riesgo tolerará quien toma la decisión. Mientras más grande sea el valor de R, menos aversión tiene al riesgo quien toma la decisión. Es decir, una persona con un valor grande de R está más dispuesta a tomar riesgos que una persona con un valor pequeño de R.

Para evaluar la función de utilidad exponencial de una persona (o compañía), sólo es necesario evaluar el valor de R. Hay un par de indicaciones para hacerlo. Primero, se ha demostrado que la tolerancia al riesgo es casi igual a la cantidad R en dólares tal que quien toma la decisión es indiferente entre las siguientes dos opciones:

- Opción 1: Obtener ningún pago en absoluto
- Opción 2: Obtener un pago de R dólares o una pérdida de $R/2$ dólares, dependiendo del lanzamiento de una moneda no cargada

Por ejemplo, si no tengo preferencia entre una apuesta donde gano 1000 dólares o pierdo $500, con 0.5 de probabilidad en cada opción, y no apostar en absoluto, entonces mi R es aproximadamente $1000. A partir de este criterio se intuye de hecho que una persona rica (o compañía) debe tener un valor grande de R. Esto se encontró en la práctica.

Otro consejo práctico para hallar R se basa en la evidencia empírica que encontró Ronald Howard, un sobresaliente analista de decisiones. A través de su experiencia como consultor de varias compañías grandes, descubrió relaciones tentativas entre tolerancia al riesgo y varias variables financieras: ventas netas, ingreso neto y recursos propios. (Véase Howard (1992).) En particular, encontró que R era aproximadamente 6.4% de las ventas netas, 124% del ingreso neto y 15.7% de recursos propios para las compañías que él estudió. Por ejemplo, de acuerdo con esta prescripción, una compañía con ventas netas de $30 millones debe tener una tolerancia al riesgo de alrededor de $1.92 millones. Howard admite que estos porcentajes son sólo guías. Sin embargo, indican que las compañías más grandes y rentables tienden a tener valores más grandes de R, lo que significa que están más dispuestas a tomar riesgos relacionados con determinadas cantidades de dólares.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que mi función de utilidad para la posición x del activo está dada por $u(x) = \ln x$.

a ¿Tengo aversión al riesgo, soy neutral o me gusta buscar el riesgo?

b Ahora tengo $20 000 y estoy considerando las dos loterías siguientes:

L_1: con probabilidad 1, pierdo $1000.
L_2: con probabilidad .9, gano $0.
con probabilidad .1, pierdo $10 000.

Determine qué lotería prefiero y el premio de riesgo de L_2.

2 Conteste el problema 1 para una función de utilidad $u(x) = x^2$.

3 Conteste el problema 1 para una función de utilidad $u(x) = 2x + 1$.

4 Demuestre que una persona que toma una decisión con una función de utilidad estrictamente convexa, exhibirá conducta de búsqueda de riesgo.

5 Demuestre que una persona que toma una decisión con una función de utilidad lineal clasificará dos loterías de acuerdo con su valor esperado.

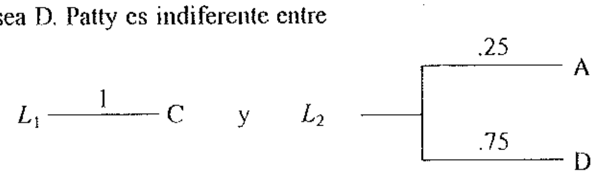
6 Una persona que toma una decisión tiene una función de utilidad para ganancias monetarias x dada por $u(x) = (x + 10\,000)^{1/2}$.

a Demuestre que la persona es indiferente entre el *estatus quo* y

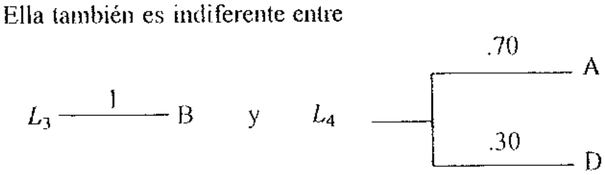
L: con probabilidad $\frac{1}{3}$, gana $80 000
con probabilidad $\frac{2}{3}$, pierde $10 000

b Si hay una posibilidad de 10% de que una pintura valuada en $10 000 sea robada durante el año próximo, ¿cuál es la mayor cantidad (por año) que quien toma la decisión estaría dispuesto a pagar para asegurar cubrir la pérdida de la pintura?

7 Patty intenta determinar cuál de dos cursos tomar. Si toma el curso de investigación de operaciones, cree que tiene 10% de probabilidad de obtener una A, 40% de probabilidad de obtener una B y 50% de probabilidad de C. Si Patty toma un curso de estadística, tiene 70% de probabilidad de obtener B, 25% de lograr una C y 5% de que su calificación sea D. Patty es indiferente entre



Ella también es indiferente entre



Si Patty quiere tomar el curso que maximiza la utilidad esperada de su calificación final, ¿cuál curso debe tomar?

8 Se quiere invertir 1000 dólares durante un periodo de 6 meses. Están disponibles dos inversiones posibles: bonos del tesoro y oro. Si se invierten $1000 en bonos del tesoro, se tiene la certeza al final del periodo de 6 meses de que se obtendrán $1296. Si se invierte en oro, hay $\frac{3}{4}$ de probabilidad de que al final del periodo de 6 meses se tengan $400 y $\frac{1}{4}$ de probabilidad de terminar el periodo de 6 meses con $10 000. Si se termina con x dólares, la función de utilidad está dada por $u(x) = x^{1/2}$. ¿Se debe invertir en oro o bonos del tesoro?

9 En la actualidad se tienen $5000 dólares en activos y las posibilidades de inversión 1 y 2. Con la inversión 1, 80% del tiempo se incrementa la posición del activo en $295 000 y 20% del tiempo se incrementa en $95 000. Con la inversión 2, 50% del tiempo la posición del activo se incrementa en $595 000 y 50% del tiempo se incrementa en $5000. La función de utilidad para la posición final del activo x es $u(x)$. Se tienen los siguientes valores para $u(x)$: $u(0) = 0$, $u(640,000) = .80$, $u(810\,000) = .90$, $u(0) = 0$, $u(90\,000) = .30$, $u(1\,000\,000) = 1$, $u(490\,000) = .7$.

a ¿Es adversa, de búsqueda o neutral la posición con respecto al riesgo? ¡Explique!

b ¿Se dará preferencia a la inversión 1 o a la 2?

10 Mi ingreso actual es de $40 000. Creo que debo $8000 en impuestos. Por $500, puedo contratar un CPA para que revise mi declaración de impuestos; hay 20% de posibilidades de que ahorre $4000 en impuestos. Mi función de utilidad para (renta disponible) = (ingreso actual) − (impuestos) − (pago al contador) está dada por $\sqrt{x}$ donde x es el ingreso disponible. ¿Debo contratar al CPA?

Grupo B

11† (La paradoja de Allais) Suponga que se nos ofrece elegir entre las siguientes dos loterías:

L_1: Con probabilidad 1, se recibe $1 millón.
L_2: Con probabilidad .10, se reciben $5 millones.
Con probabilidad .89, se recibe $1 millón.
Con probabilidad .01, se recibe $0.

¿Qué lotería se prefiere? Ahora considere las dos loterías siguientes:

L_3: Con probabilidad .11, se recibe $1 millón.
Con probabilidad .89, se recibe $0.
L_4: Con probabilidad .10, se reciben $5 millones.
Con probabilidad .90, se recibe $0.

†Basado en Allais (1953).

¿Cuál lotería se prefiere? Suponga (como la mayoría de las personas), que se prefiere L_1 a L_2. Demuestre que L_3 debe tener una utilidad esperada más grande que L_4.

12 (La paradoja de San Petersburgo) Sea L la siguiente lotería. Lanzó una moneda hasta salir cara. Si la primera cara se obtiene en el n-ésimo lanzamiento de la moneda, recibo un pago de $\$2^n$.

a Si yo fuese una persona neutral al riesgo que toma una decisión, ¿cuál sería la certeza equivalente de L? ¿Es esto razonable?

b Si la función de utilidad de una persona que toma una decisión para incrementar su riqueza en x dólares está dada por $u(x) = \log_2(x)$, ¿cuál sería el equivalente de certidumbre de L?

13 Joe es una persona que toma una decisión, pero es adversa al riesgo. ¿Cuál de las siguientes loterías preferiría Joe?

L_1: Con probabilidad .10, Joe pierde \$100.
Con probabilidad .90, Joe recibe \$0.

L_2: Con probabilidad .10, Joe pierde \$190.
Con probabilidad .90, Joe recibe \$10.

14† (La paradoja de Ellsberg) Una urna contiene 90 pelotas. Se sabe que 30 son rojas y que cada una de las otras 60 es amarilla o negra. Se saca una bola al azar de la urna. Considere las cuatro opciones siguientes:

Opción 1 Se reciben \$1000 si se extrae una bola roja.
Opción 2 Se reciben \$1000 si se extrae una bola amarilla.
Opción 3 Se reciben \$1000 si se extrae una bola amarilla o negra.
Opción 4 Se reciben \$1000 si se extrae una bola roja o negra.

a Explique por qué la mayoría de las personas prefieren la opción 1 en vez de la opción 2 y también prefieren la opción 3 sobre la opción 4.

b Si se prefiere la opción 1 a la opción 2, explique por qué se debe preferir la opción 4 sobre la opción 3.

15 Aunque los axiomas de Von Neumann-Morgenstern al parecer son plausibles, hay muchas situaciones en las que al parecer se violan estos axiomas. Por ejemplo, suponga que un universitario recién graduado debe elegir entre tres ofertas de trabajo con base en el salario inicial, lugar de trabajo y oportunidad de superarse. Dadas dos ofertas de trabajo que son satisfactorias con respecto a los tres atributos, el graduado decidirá entre dos ofertas de empleo eligiendo la que sea superior en por lo menos dos de los tres atributos. Suponga que el graduado tiene tres ofertas de trabajo y que las clasificó como se ilustra en la tabla 8 (E = excelente, B = buena y S = satisfactoria). Demuestre que las preferencias del graduado entre estos trabajos violan el axioma de ordenación completa.

TABLA 8

	Salario inicial	Ubicación	Oportunidad de ascenso
Empleo 1	E	S	G
Empleo 2	G	E	S
Empleo 3	S	G	E

Grupo C

16 Suponga que mi función de utilidad para mi posición de activo es $u(x) = x^{1/2}$. En la actualidad cuento con \$10 000. Considere la siguiente lotería:

L: Con probabilidad $\frac{1}{2}$, L produce un pago de \$1025.
Con probabilidad $\frac{1}{2}$, L produce un pago de −\$199.

a Si no tengo derecho a jugar L, encuentre una ecuación que al resolverla produzca la cantidad que estaría dispuesto a pagar por el derecho de jugar L. A esto se le conoce como **precio de compra** de la lotería L.

b Si tengo derecho a jugar L, ¿cuál es el mínimo que aceptaría de alguien que quisiera comprar el derecho a jugar L? (Después que alguien más compra L, no puedo jugar.) A esto se le llama el **precio de venta** de la lotería L.

c Conteste el inciso (b) para el caso en que tengo \$1000.

d Suponga que mi función de utilidad para mi posición de activo es $u(x) = 1 - e^{-x}$. Demuestre que para las posiciones posibles del activo, el precio de compra de L y el precio de venta de L permanecen sin cambio. Demuestre que para todas las posiciones del activo, el precio de compra de L será igual al precio de venta de L.

13.3 Fallas en la maximización esperada de la utilidad: teoría prospectiva y efectos de encuadre

Al parecer son razonables los axiomas que sustentan la maximización esperada de la utilidad (MEU), pero en la práctica, las decisiones de las personas a menudo se desvían de las predicciones de la MEU. Los psicólogos Tversky y Kahneman‡ (1981) elaboraron la **teoría del prospecto y los efectos de marco para valores** a fin de tratar y explicar por qué las personas se desvían de las predicciones de la MEU.

‡En 2002, Kahneman recibió el premio Nóbel de economía, en gran parte honrando su trabajo con Tversky. Tversky no recibió el premio porque murió en 1966 (el premio Nóbel no se otorga después de muerto).

Teoría del prospecto

A continuación se da un ejemplo de una decisión que no puede explicarse mediante la MEU. Pida a una persona que elija entre la lotería 1 y la lotería 2:

Lotería 1:	\$30 para cuando se está seguro
Lotería 2:	probabilidad de 80% en \$45 y 20% en \$0

La mayoría de las personas prefieren la lotería 1 a la lotería 2. A continuación se pide a la misma persona que elija entre la lotería 3 y la lotería 4.

Lotería 3:	20% de probabilidad en \$45 y 80% en \$0
Lotería 4:	25% en \$30 y 75% de probabilidad en \$0

La mayoría de las personas eligen la lotería 3 en vez de la 4. Ahora sea $u(0) = 0$ y $u(45) = 1$. Una persona que toma una decisión siguiendo la MEU elegirá la lotería 1 en vez de la lotería 2 si y sólo si $u(30) > .8$. Una persona que toma una decisión siguiendo la MEU elegirá la lotería 3 sobre la 4 si y sólo si $.2 > .25u(30)$ o $u(30) < .8$. Esto implica que alguien que cree en la MEU no puede elegir la lotería 1 en vez de la 2 y la lotería 3 en lugar de la 4. Así, para esta situación, las elecciones de la mayoría de las personas contradicen la MEU. Tversky y Kahneman elaboraron la teoría del prospecto para explicar la paradoja de toma de decisiones antes descrita. En la teoría del prospecto se supone que no se tratan las probabilidades como se dan en un problema de toma de decisiones. En vez de eso, quien toma la decisión trata una probabilidad p para un suceso como una probabilidad "distorsionada" $\Pi(p)$. Una función $\Pi(p)$ que al parecer explica muchas paradojas se ilustra en la figura 4.

La forma de la función $\Pi(p)$ en la figura indica que los individuos son más sensibles a cambios de probabilidad cuando la probabilidad de un suceso es pequeña (cercana a 0) o grande (cercana a 1). La ecuación que se utiliza para construir la curva $\Pi(p)$ es $\Pi(p) = 1.89799p - 3.55995p^2 + 2.662549p^3$. ¿Cómo explica la teoría del prospecto la paradoja? De los valores de $\Pi(p)$ dados en la figura 5, se comparan los "prospectos" esperados de la lotería 1 contra la lotería 2 y la lotería 3 contra la lotería 4.

Prospecto para la lotería 1:	$u(30)$
Prospecto para la lotería 2:	.602
Prospecto para la lotería 3:	.258
Prospecto para la lotería 4:	$.293u(30)$.

Así, se prefiere la lotería 1 a la lotería 2 si $u(30) > .602$, en tanto que se prefiere la lotería 3 a la lotería 4 si $.258 > .293u(30)$ o $u(30) < .258/.293 = .88$. Nuestra paradoja se evapora, porque para muchas personas, ¡$u(30)$ estará entre .602 y .88!

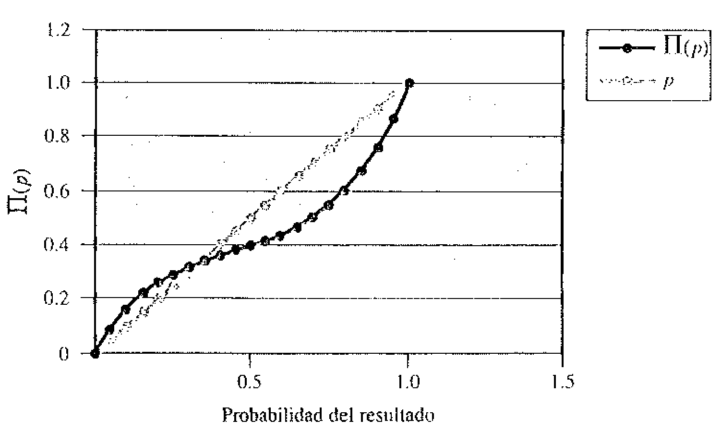


FIGURA 4
Peso aplicado a la utilidad

	C	D
15	0.1	0.156803
16	0.15	0.213497
17	0.2	0.258382
18	0.25	0.293455
19	0.3	0.320713
20	0.35	0.342153
21	0.4	0.359771
22	0.45	0.375565
23	0.5	0.391531
24	0.55	0.409667
25	0.6	0.431969
26	0.65	0.460434
27	0.7	0.497059
28	0.75	0.543841
29	0.8	0.602778
30	0.85	0.675865
31	0.9	0.7651
32	0.95	0.872479
33	1	1

FIGURA 5
Prospectos de la lotería

Marco

La idea de enmarcar se basa en el hecho de que las personas a menudo establecen su función de utilidad a partir del punto de vista de un marco o *status quo* desde el que ven la situación actual. La mayor parte de las funciones de utilidad de las personas tratan una pérdida de un valor determinado de manera más seria que una ganancia de un valor idéntico. Esto se refleja en la función de utilidad mostrada en la figura 6, que es convexa para pérdidas y cóncava para ganancias.

Para ver cómo el marco explica la falla de la MEU, considere el siguiente problema que Tversky y Kahneman dieron a un grupo de estudiantes. Estados Unidos se está preparando para el brote de una enfermedad en la que se espera mueran 600 personas. Se propusieron dos programas diferentes:

Programa I: se salvan 200 personas.
Programa II: con probabilidad $\frac{1}{3}$, se salvan 600 personas.

La mayoría de los estudiantes prefieren el programa I debido a que con el programa II es probable que haya un gran riesgo de no salvar a nadie. Puesto que los programas se expresan en términos de vidas salvadas, la mayoría de las personas toman el marco o punto de referencia para este problema como ninguna vida salvada o 600 personas muertas. Puesto que el efecto de cada programa se expresa en ganancias, y la función de utilidad es cóncava para las ganancias, se encuentra que $u(200) = u((\frac{2}{3})\ 0 + (\frac{1}{3})600)) > (\frac{1}{3})u(600) + (\frac{2}{3})u(0) = (\frac{1}{3})u(600)$. Esto significa, por supuesto, que la persona elige el programa I en vez del programa II.

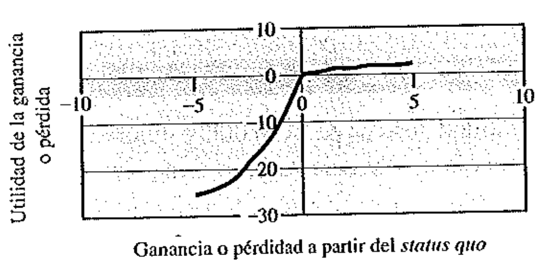


FIGURA 6
Función de utilidad para el marco

Luego, Tversky y Kahneman replantearon el problema como sigue:

Programa I: Mueren 400 personas.

Programa II: Con probabilidad $\frac{2}{3}$, mueren 600 personas.

Ahora la mayoría de las personas eligen el programa II. Observe que los dos programas I son idénticos, así como los programas II. ¿Por qué la mayoría de las personas eligen el programa II por la segunda frase de las alternativas? La segunda frase cambia el punto de referencia de la mayoría de las personas de "ninguna vida se salva" (en el primer modo de expresarse) a "nadie muere". Los resultados se expresan como pérdidas (muertes), así que la convexidad de la curva de utilidad para pérdidas implica que

$$(\tfrac{2}{3})u(-600) = (\tfrac{2}{3})u(-600) + (\tfrac{1}{3})u(0) > u((\tfrac{2}{3})(-600) + \tfrac{1}{3}(0)) = u(-400)$$

Esto implica, por supuesto, que la persona elige el programa II en vez del programa I.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Explique cómo la teoría del prospecto o marco, o ambos, explica la paradoja de Allais. (Véase el problema 11 de la sección 13.2.)

2 Suponga que una persona que toma una decisión tiene una función de utilidad $u(x) = x^{1/3}$. Se lanza una moneda no cargada y se reciben \$10 si cae cara y \$0 si cae cruz.

a Por medio de la teoría de la utilidad esperada, determine el equivalente de certidumbre de esta lotería.

b Con $\Pi(p) = 1.89799p - 3.55995p^2 + 2.662549p^3$, use la teoría del prospecto para determinar el equivalente de certidumbre de la lotería.

c De manera intuitiva, explique por qué su respuesta del inciso (b) es más pequeña que su respuesta del inciso (a).

d ¿Qué implicaciones tiene este problema para el método usado en la sección 13.2 para estimar la función de utilidad de una persona?

3 Usted tiene la opción de elegir entre la lotería 1 y la lotería 2. También se le da la opción de elegir entre la lotería 3 y la lotería 4.

Lotería 1:	Una ganancia segura de \$240
Lotería 2:	Probabilidad de 25% de ganar \$1000 y 75% de probabilidad de ganar nada
Lotería 3:	Una pérdida segura de \$750
Lotería 4:	Una probabilidad de 75% de perder \$1000 y una probabilidad de 25% de perder nada

84% de las personas prefieren la lotería 1 a la lotería 2 y 87% eligen la lotería 4 y no la 3.

a Explique por qué la elección de la lotería 1 sobre la lotería 2 y la lotería 4 sobre la 3 contradice la maximización de utilidad esperada. (*Sugerencia*: compara la lotería 1 + lotería 4 con la lotería 2 + lotería 3.)

b ¿Puede explicar este comportamiento anómalo?

4 Tversky y Kahneman pidieron a 72 encuestados que eligieran entre la lotería 1 y la lotería 2 y la lotería 3 y la 4.

Lotería 1:	Un probabilidad de .001 de ganar \$5000 y una probabilidad de .999 de ganar \$0.
Lotería 2:	Una ganancia segura de \$5
Lotería 3:	Una probabilidad .001 de perder \$5000 y probabilidad .999 de perder \$0.
Lotería 4:	Una pérdida segura de \$5

Más de 75% de los participantes prefirieron la lotería 1 a la lotería 2 y la lotería 4 a la lotería 3.

a ¿Qué elecciones haría quien toma una decisión y tiene aversión al riesgo?

b ¿Qué elecciones haría una persona que toma una decisión y es propensa al riesgo?

c ¿Cómo contradice el comportamiento observado de los participantes la maximización de la utilidad esperada?

d ¿Cómo resuelve la teoría del prospecto la contradicción?

13.4 Árboles de decisión

A menudo, las personas deben tomar una serie de decisiones en diferentes puntos del tiempo. Entonces se pueden usar árboles de decisión para determinar decisiones óptimas. Un árbol de decisión permite que quien toma la decisión descomponga un gran problema de decisión complejo en varios problemas más pequeños.

EJEMPLO 3 Comercialización de Colaco

Colaco tiene en la actualidad activos de \$150 000 y quiere decidir si comercializa una nueva soda con sabor a chocolate, Chocola. Colaco tiene tres opciones:

Opción 1 Promocionar Chocola en el mercado local, luego utilizar los resultados del estudio de mercado para determinar si se comercializa Chocola a nivel nacional.

Opción 2 Comercializar Chocola de inmediato (sin promocionar) a nivel nacional.

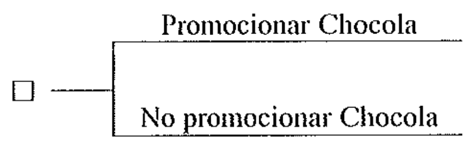
Opción 3 Decidir de inmediato (sin promocionar) no comercializar Chocola a nivel nacional.

En ausencia de un estudio de mercado, Colaco cree que Chocola tiene una probabilidad de 55% de ser un éxito nacional, y una probabilidad de 45% de ser un fracaso nacional. Si Chocola es un éxito nacional, la posición del activo de Colaco se incrementará en \$300 000, y si Chocola es un fracaso nacional, la posición del activo de Colaco disminuirá en \$100 000.

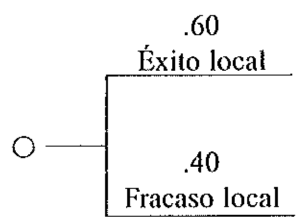
Si Colaco lleva a cabo un estudio de mercado (a un costo de \$30 000), hay una probabilidad de 60% de que el estudio produzca resultados favorables (indicados como un *éxito local*) y una probabilidad de 40% de que el estudio produzca resultados no favorables (mencionados como un *fracaso local*). Si se observa un éxito local, hay una probabilidad de 85% de que Chocola sea un éxito nacional. Si se observa un fracaso local, hay sólo una probabilidad de 10% de que Chocola sea un éxito nacional. Si Colaco es neutral al riesgo (quiere maximizar su estado final esperado de activos), ¿qué estrategia debe seguir la compañía?

Solución Para trazar un árbol de decisión que represente el problema de Colaco, se comienza en el presente y se procede hacia sucesos y decisiones futuras. El árbol de decisión de la figura 7 se construye con dos clases de bifurcaciones: las bifurcaciones de decisión (denotadas por □) y las bifurcaciones de suceso (denotadas por ○).

Una **bifurcación de decisión** representa un punto en el tiempo cuando Colaco tiene que tomar una decisión. Cada rama que emana de un árbol de decisión representa una decisión posible. Un ejemplo de una bifurcación de decisión ocurre cuando Colaco debe determinar si promociona Chocola o no.



Se traza una **bifurcación de suceso** cuando las fuerzas externas determinan cuál de varios sucesos aleatorios ocurrirá. Cada rama de una bifurcación de suceso representa un resultado posible, y el número en cada rama representa la probabilidad de que ocurra el suceso. Por ejemplo, si Colaco decide promocionar Chocola, la compañía enfrenta la siguiente bifurcación de suceso al observar los resultados del estudio de mercados:



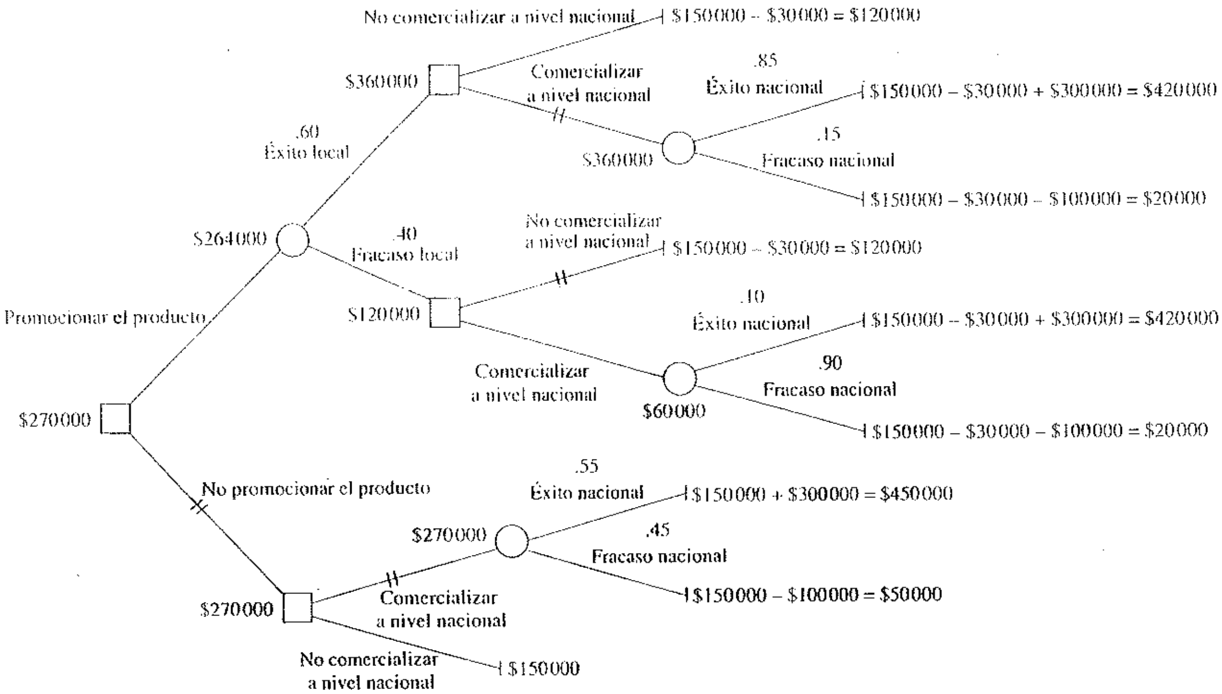
Una rama de un árbol de decisión es una **rama terminal** si ninguna bifurcación emana de la rama. Así, las ramas que indican éxito nacional y fracaso nacional son ramas terminales del árbol de decisión de Colaco. Puesto que se está maximizando el estado final esperado del activo en cada rama terminal, se debe introducir el estado final del activo que resulta si ocurre la trayectoria que lleva a la rama terminal determinada. Por ejemplo, la rama terminal fracaso nacional que sigue a fracaso local, conduce a un estado final de los activos de $150\,000 - 30\,000 - 100\,000 = \$20\,000$. Si se fueran a maximizar los ingresos esperados, se introducirían los ingresos en cada rama terminal.

Para determinar las decisiones que maximizarán el estado final esperado de los activos de Colaco, se trabaja hacia atrás (a lo que a veces se conoce como "plegado del árbol hacia atrás") de derecha a izquierda.† En cada bifurcación de suceso, se calcula el estado fi-

†Véanse los capítulos 17 y 18 para una explicación del trabajo hacia atrás (conocido como *programación dinámica*).

FIGURA 7

Árbol de decisión de Colaco (neutral al riesgo)



nal o de los activos y se introduce en ○. En cada bifurcación de decisión, se denota por ‖ la decisión que maximiza el estado final esperado de los activos y se introduce el estado final esperado de los activos asociado con esa decisión en □. Se continúa trabajando hacia atrás de este modo hasta que se llega al comienzo del árbol. Entonces la secuencia óptima de decisiones se puede obtener siguiendo el símbolo ‖.

Se empieza por determinar los estados finales esperados de los activos para las tres bifurcaciones de suceso siguientes:

1 Comercializar a nivel nacional después del éxito local. Aquí se tiene un estado final esperado de los activos de .85(420 000) + .15(20 000) = $360 000.

2 Comercializar a nivel nacional después del fracaso local. Aquí se tiene un estado final esperado de los activos de .10(420 000) + .90(20 000) = $60 000.

3 Comercializar a nivel nacional después de no probar en el mercado. Aquí se tiene un estado final esperado de los activos de .55(450 000) + .45(50 000) = $270 000.

Ahora se podrían evaluar tres bifurcaciones de decisión:

1 Decisión después del éxito local. Comercializar a nivel nacional produce un estado final esperado de los activos más grande que no comercializar a nivel nacional, de modo que se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce un estado final esperado de los activos de $360 000.

2 Decisión después de fracaso local. No comercializar a nivel nacional produce un estado final esperado de los activos más grande que comercializar a nivel nacional, de modo que no se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce un estado final esperado de los activos de $120 000.

3 Decisión de no probar en el mercado. Comercializar a nivel nacional produce un estado final esperado de los activos más grande que no comercializar a nivel nacional, de modo que se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce un estado final esperado de los activos de $270 000.

Ahora se debe evaluar la bifurcación de suceso que emana de la decisión de promocionar el producto. Esta bifurcación de suceso produce un estado final esperado de los activos de $.60(360\,000) + .40(120\,000) = \$264\,000$, que se introduce en ○.

Lo que resta es determinar la decisión correcta en la bifurcación, promocionar el producto contra ninguna promoción. Se ha encontrado que promocionar el producto produce un estado final esperado de los activos de \$264 000, y no promocionar da un estado final esperado de los activos de \$270 000. Así que no se || realiza una promoción del producto y se introduce \$270 000 en □.

Ahora estamos en el comienzo del árbol y se encontró que la decisión óptima de Colaco es no promocionar y comercializar a nivel nacional. Esta estrategia producirá un estado final esperado de los activos de \$270 000. Observe que el árbol de decisión también muestra que si se hubiera promocionado el producto y, en consecuencia, actuado de manera óptima (comercializar a nivel nacional después del éxito local y no comercializar a nivel nacional después del fracaso local), se habría obtenido un estado final esperado de los activos de \$264 000.

Incorporación de la aversión al riesgo en el análisis del árbol de decisión

Observe que la estrategia óptima de Colaco produce una probabilidad de .45 de que la compañía termine con un estado o posición final de activos relativamente pequeña, igual a \$50 000. Por otro lado, la estrategia de promocionar el producto y actuar de manera óptima con base en los resultados del estudio de mercado produce sólo una probabilidad de $(.60)(.15) = .09$ de que el estado de los activos de Colaco esté abajo de \$100 000. (¿Por qué?) Así, si Colaco tiene aversión al riesgo y toma una decisión, la estrategia de comercializar de inmediato a nivel nacional no reflejaría la preferencia de la compañía.

Para ilustrar cómo se podría incorporar la aversión al riesgo en el análisis del árbol de decisión, suponga que Colaco tiene la función de utilidad con aversión al riesgo $u(x)$ de la figura 8 (x = estado final de los activos). (¿Cómo se sabe que esta función de utilidad exhibe aversión al riesgo?) *Para determinar las decisiones óptimas de Colaco (es decir, las decisiones que maximizan la utilidad esperada), simplemente sustituya cada estado final x_0 de los activos por su utilidad $u(x_0)$. Luego en cada bifurcación de suceso, calcule la utilidad esperada del estado final de los activos de Colaco, y en cada bifurcación de decisión, elija la rama que tiene la utilidad esperada más grande.*

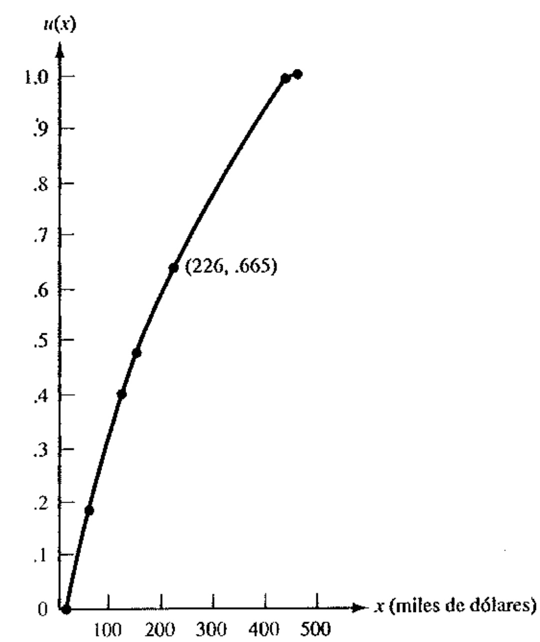


FIGURA 8
Función de utilidad de Colaco

De la figura 8 se encuentra que $u(\$450\,000) = 1$, $u(\$420\,000) = .99$, $u(\$150\,000) = .48$, $u(\$120\,000) = .40$, $u(\$50\,000) = .19$, y $u(\$20\,000) = 0$. Sustituyendo estos valores en el árbol de decisión de la figura 7 se obtiene el árbol de decisión de la figura 9. Se calcula la utilidad esperada en las tres bifurcaciones de suceso siguientes:

1 Comercializar a nivel nacional después del éxito local. Aquí se tiene una utilidad esperada de $.85(.99) + .15(0) = .8415$.

2 Comercializar a nivel nacional después del fracaso local. Aquí se tiene una utilidad esperada de $.10(.99) + .90(0) = .099$.

3 Comercializar a nivel nacional después de no promocionar el producto. Aquí se tiene una utilidad esperada de $.55(1) + .45(.19) = .6355$.

Ahora es posible evaluar tres bifurcaciones de decisión:

1 Decisión después del éxito local. Comercializar a nivel nacional produce una utilidad esperada más grande que no comercializar a nivel nacional, de modo que para esta bifurcación se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce una utilidad esperada de 0.8415.

2 Decisión después del fracaso local. No comercializar a nivel nacional produce una utilidad esperada más grande que comercializar a nivel nacional, de modo que para esta bifurcación no se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce una utilidad esperada de .40.

3 Decisión de no promocionar el producto. Comercializar a nivel nacional produce una utilidad esperada más grande que no comercializar a nivel nacional, de modo que para esta bifurcación se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce una utilidad esperada de .6355.

Ahora se debe evaluar la bifurcación de suceso que emana de la decisión de promocionar el producto. Esta bifurcación de suceso produce una utilidad esperada de $.60(.8415) + .40(.40) = .6649$, que se introduce en ○. Lo que resta es determinar la decisión correcta en la bifurcación de decisión de promocionar el producto contra no promocionar. Se sabe que promocionar el producto produce una utilidad esperada de .6649 y no promocionar da una utilidad esperada de .6355, así que se ‖ promociona el producto y se introduce una utilidad esperada de .6649 en □.

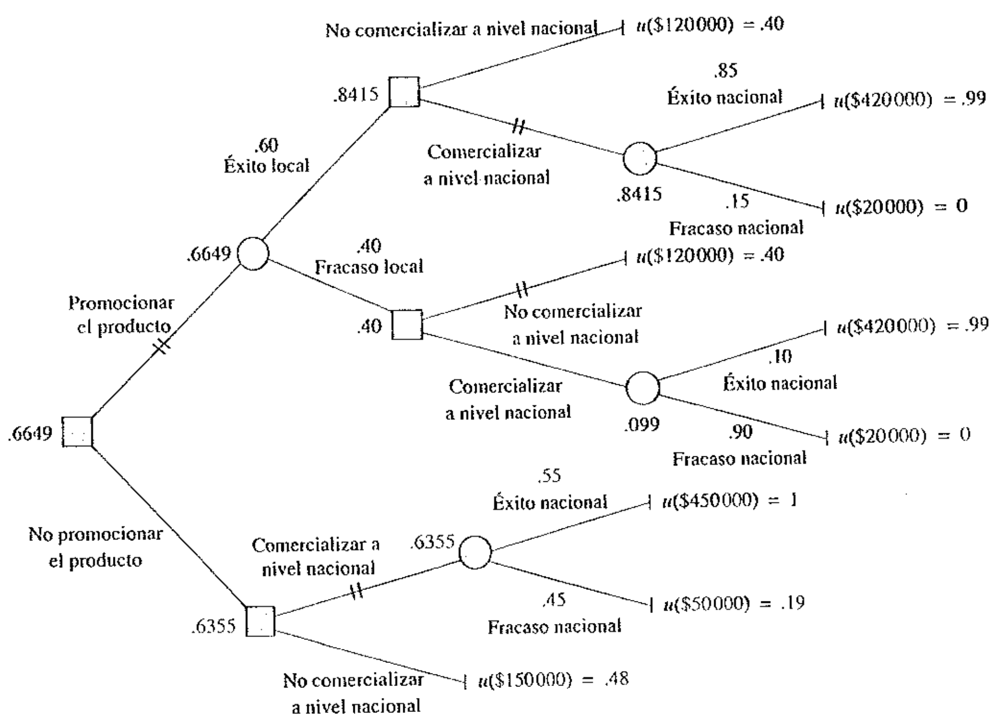


FIGURA 9
Árbol de decisión de Colaco (adversión al riesgo)

$u(\$226000) = .6649$, así que esta situación es equivalente a un cierto estado de activos de \$226000.

Ya se llegó al comienzo del árbol y se encontró que la decisión óptima de Colaco es comenzar por promocionar el producto. Si se observa un éxito local, entonces Colaco debe comercializar Chocola a nivel nacional; si se observa un fracaso local, entonces Colaco no debe comercializar Chocola a nivel nacional. Esta estrategia óptima produce sólo una probabilidad de .60(.15) = .09 de que Colaco tendrá un estado final de activos de menos de \$100 000. Esto refleja la naturaleza de aversión al riesgo de la función de utilidad de la figura 8. También, se ve en la figura 8 que u(\$226 000) = .665. Puesto que el punto de vista de Colaco es que la situación actual tiene una utilidad esperada de .6649. Esto significa que la compañía considera la situación actual equivalente a un cierto estado de los activos de \$226 000. Así, si alguien ofreciera pagar más de 226 000 − 150 000 = \$76 000 para comprar los derechos de Chocola, Colaco debe tomar la oferta. Esto es porque recibir más de \$76 000 por los derechos de Chocola llevaría el estado de los activos de Colaco a más de 150 000 + 76 000 = \$226 000, y esta situación tiene una utilidad esperada mayor que .665.

Valor esperado de la información muestral

Los árboles de decisión se pueden usar para medir el valor de la muestra o la información de mercado. Para ilustrar cómo se hace esto, se supone de nuevo que Colaco es neutral al riesgo. ¿Cuál es el valor de la información que se obtendría al promocionar Chocola?

Comenzamos por determinar el estado final esperado de los activos de Colaco si la compañía actúa de manera óptima y el estudio de mercado es sin costo. A este estado final esperado de los activos, se le llama **valor esperado con la información muestral** (VECIM) de Colaco. De la figura 7, se ve que si se promociona el producto y luego se actúa de manera óptima, se tendrá un estado final esperado de los activos de 264 000 + 30 000 = \$290 000. Puesto que \$290 000 es más grande que el estado esperado de los activos de la rama No promocionar el producto (\$270 000), se encuentra que VECIM = \$294 000.

A continuación se determina el estado final esperado de los activos que obtendría Colaco si no estuviera disponible el estudio de mercado. Llamamos a esto el **valor esperado con la información original** (VECIO). A partir de la rama No promocionar el producto de la figura 7, se encuentra que VECIO = \$270 000. Ahora el valor esperado de la información de mercado, mencionada como **valor esperado de la información muestral** (VEIM), se define como VEIM = VECIM − VECIO.

En el ejemplo de Colaco, VEIM es la cantidad que a lo sumo puede pagar Colaco por la información de mercado y aún estar al menos tan confortable como si no tuviera esta información. Así, para el ejemplo de Colaco, VEIM = 294 000 − 270 000 = \$24 000. Puesto que el costo del estudio de mercado (\$30 000) es mayor que VEIM, Colaco no debe llevar a cabo (como ya se sabía) el estudio de mercado.

Valor esperado de la información perfecta

Se puede modificar el análisis usado para determinar VEIM a fin de encontrar el valor de la información perfecta. Por **información perfecta** se entiende que los sucesos inciertos que afectan el estado final de los activos de Colaco aún ocurren con las probabilidades determinadas (así que aún hay .55 de probabilidad de que Chocola sea un éxito nacional y una probabilidad de .45 de que Chocola sea un fracaso nacional), pero Colaco averigua si Chocola será un éxito o un fracaso nacional *antes* de tomar la decisión de comercializarla a nivel nacional o no. Esta información se puede usar entonces para determinar la estrategia de comercialización óptima de Colaco. Así, el **valor esperado con la información perfecta** (VECIP) se encuentra dibujando un árbol de decisión en el que quien toma la decisión cuenta con información perfecta acerca de qué estado ocurrió antes de tomar una decisión. Entonces el **valor esperado de la información perfecta** (VEIP) está dado por VEIP = VECIP − VEIM.

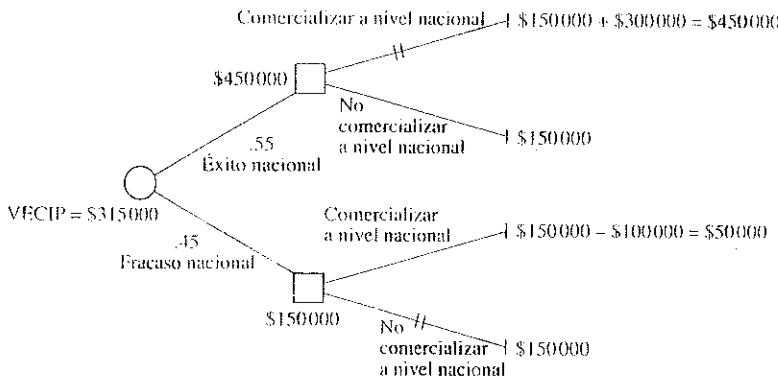


FIGURA 10
Valor esperado con la información perfecta (VECIP) para Colaco

Para el ejemplo de Colaco, se encuentra de la figura 10 que VECIP = $315 000. Entonces VEIP = 315 000 − 270 000 = $45 000. Así, un estudio de mercado perfecto (uno que siempre fue correcto) valdría $45 000. El VEIP es una cota superior útil en el valor de la muestra o información de mercado; es decir, ninguna información de muestra o de mercado (sin importar cuán buena sea) puede valer más de $45 000.

EJEMPLO 4 Comerciante de arte

Un cliente de un comerciante de arte está dispuesto a comprar la pintura *Sunplant* en $50 000. El comerciante puede comprar la pintura hoy por $40 000, o puede esperar un día y comprar la pintura mañana (si no se ha vendido) por $30 000. El comerciante podría esperar también otro día y comprar la pintura (si aún está disponible) por $26 000. Al final del tercer día, la pintura no estará disponible para venta. Cada día, hay una probabilidad de .60 de que sea vendida la pintura. ¿Qué estrategia maximiza la ganancia esperada del comerciante?

Solución El árbol de decisión para este ejemplo se da en la figura 11. La clave para trazar este árbol de decisión es que cada día, el comerciante debe elegir entre comprar la pintura y esperar otro día. Por supuesto, esperar podría significar que el comerciante nunca pudiera vender la pintura. Como se observa en el árbol de decisión, el comerciante debe comprar la pintura el primer día.

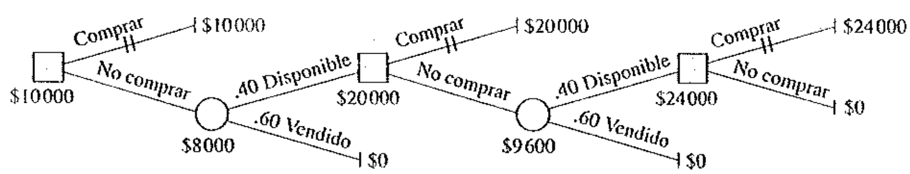


FIGURA 11
Árbol de decisión para el ejemplo 4

PROBLEMAS

Grupo A

1 Oilco debe determinar si perfora en busca de petróleo o no en el mar del sur de China. Hacer la perforación cuesta $100 000, y si se encuentra petróleo, el valor estimado es $600 000. En el presente, Oilco cree que hay 45% de probabilidades de que el campo contenga petróleo. Antes de perforar, Oilco puede contratar un geólogo (por $10 000) para obtener más información acerca de la probabilidad de que el pozo contenga petróleo. Hay una probabilidad de 50% de que el geólogo emita un informe favorable y 50% de probabilidades de un informe desfavorable. Si el reporte es favorable, hay una probabilidad de 80% de que el campo contenga petróleo. Si el informe es desfavorable, hay 10% de probabilidades de que el campo contenga petróleo. Determine el curso de acción óptimo de Oilco. También determine el VEIM y el VEIP.

2 El departamento de ciencias de decisión intenta determinar cuál de dos máquinas copiadoras comprar. Ambas máquinas cumplirán las necesidades del departamento durante los diez años siguientes. La máquina 1 cuesta 2000 dólares y tiene un acuerdo de mantenimiento que, por una cuota anual de $150, cubre todas las reparaciones. La máquina 2 cuesta 3000 dólares y su costo de mantenimiento anual es una variable aleatoria. En el presente, el departamento de ciencias de la decisión cree que hay 40% de probabilidades de que el costo de mantenimiento anual para la máquina 2 sea de \$0, 40% de probabilidades de que sea \$100 y 20% de probabilidades de que sea \$200.

Antes de que se tome la decisión de comprar, el departamento puede pedir a un técnico capacitado que evalúe la calidad de la máquina 2. Si el técnico cree que la máquina 2 es satisfactoria, hay 60% de probabilidades de que su costo de mantenimiento anual sea \$0, y 40% de probabilidades de que sea \$100. Si el técnico cree que la máquina 2 es insatisfactoria, hay 20% de probabilidades de que el costo de mantenimiento anual sea \$0, 40% de que sea 100 y 40% de que sea \$200. Si hay 50% de probabilidades de que el técnico dé un informe satisfactorio, ¿cuál es el VEIM? Si el técnico cobra \$40, ¿qué debe hacer el departamento de ciencias de la decisión? ¿Cuál es el VEIP?

3 Soy el entrenador de los Cachorros de Chicago. Suponga que hay un corredor en primera base y ningún *out* y se quiere determinar si se debe ordenar un toque de bola. Suponga que un toque de bola producirá uno de dos resultados: (1) Con probabilidad .80, el toque de bola será exitoso, en cuyo caso el bateador queda fuera y el corredor de la primera base pasa a segunda. (2) Con probabilidad .20 el toque de pelota será infructuoso y el corredor de la primera base queda fuera tratando de avanzar a la segunda y el bateador llega a la primera base.

El número de carreras esperadas que anotarán los Cachorros en una entrada en varias situaciones se da en la tabla 9.

a Si el objetivo es maximizar el número esperado de carreras anotadas en una entrada, ¿se debe tocar la bola? A pesar de esta respuesta, ¿por qué cree que los entrenadores ordenan tocar la bola?

b Si estamos considerando el robo de la segunda base sin ningún *out*, ¿qué probabilidad de éxito se necesita para que el robo de la segunda sea una decisión óptima?

4 La compañía Nitro Fertilizer está elaborando un nuevo fertilizante. Si Nitro comercializa el producto y tiene éxito, la compañía obtendrá una ganancia de \$50 000; si no tiene éxito, la compañía perderá \$35 000. En el pasado, productos similares han tenido éxito 60% de las veces. A un costo de \$5000, se puede probar la efectividad del nuevo fertilizante. Si el resultado de la prueba es favorable, hay 80% de probabilidades de que el fertilizante tenga éxito. Si la prueba resulta desfavorable, sólo hay 30% de probabilidades de que tenga éxito el fertilizante. Hay 60% de probabilidades de un resultado de prueba favorable y 40% de probabilidades de un resultado de prueba desfavorable. Determine la estrategia óptima de Nitro. También obtenga el VEIM y el VEIP.

5 Durante el verano, el nadador olímpico Adam Johnson nada todos los días. En los días soleados va a una alberca al aire libre, donde puede nadar sin costo alguno. En los días lluviosos, él tiene la opción de comprar un pase de temporada de 15 dólares para la alberca cubierta, que le permite usarla todo el verano. Si no compra el pase de temporada, debe pagar 1 dólar cada vez que vaya ahí. En los registros meteorológicos se observa que hay 60% de probabilidades de que el verano sea soleado (en cuyo caso el promedio es de 6 días lluviosos durante el verano) y una probabilidad de 40% de que el verano sea lluvioso (un promedio de 30 días de lluvia durante el verano).

Antes que comience el verano, Adam tiene la opción de comprar un pronóstico del clima de largo alcance por 1 dólar. El pronóstico predice un verano soleado 80% del tiempo y un verano lluvioso 20% del tiempo. Si el pronóstico predice un verano soleado, hay una probabilidad de 70% de que el verano sea en realidad soleado. Si el pronóstico predice un verano lluvioso, hay una probabilidad de 80% de que en realidad el verano sea lluvioso. Suponiendo que el objetivo de Adam sea minimizar su costo total esperado para el verano, ¿qué debe hacer? Encuentre también el VEIM y el VEIP.

6 Pete está considerando hacer una apuesta en el juego decisivo de la NCAA entre Indiana y Purdue. Sin más información, él cree que cada equipo tiene las mismas probabilidades de ganar. Si gana la apuesta, obtiene \$10 000; si la pierde, perderá \$11 000. Antes de apostar, podría pagar a Bobby \$1000 por su predicción confidencial acerca del juego; 60% de las veces, la predicción de Bobby es que Indiana ganará y 40% del tiempo, Bobby predice que ganará Purdue. Cuando Bobby dice que ganará la UI, la UI tiene una probabilidad de 70% de ganar, y cuando Bobby dice que ganará Purdue, la UI sólo tiene 20% de probabilidades de ganar. Determine de qué manera Pete puede maximizar su ganancia total esperada. ¿Cuál es el VEIM? ¿Cuál es el VEIP?

7 Erica va a volar a Londres el 5 de agosto y regresa a casa el 20 del mismo mes. Estamos a 1 de julio y ella podría comprar hoy un boleto de viaje sencillo (por \$350) o un boleto de viaje redondo (por \$660). Ella también podría esperar hasta el 1 de agosto para comprar un boleto. El primero de agosto un boleto sencillo costará \$370 y uno de viaje redondo costará \$730. Es posible que entre el primero de julio y el primero de agosto, su hermana (quien trabaja para una aerolínea) pueda obtener un boleto sencillo gratis para Erica. La probabilidad de que su hermana obtenga el boleto gratis es de .30. Si Erica compra un boleto de viaje redondo el primero de julio y su hermana obtiene un boleto gratis, ella puede devolver la mitad de su viaje redondo a la aerolínea. En este caso, el costo total del boleto será de \$330 más una penalización de \$50. Utilice un árbol de decisión para determinar cómo maximizar el costo esperado de Erica de obtener transporte de viaje redondo a Londres.

8 Soy un concursante en el programa de TV *Remote Jeopardy*, que funciona como sigue: Primero se me hace una pregunta acerca de videos estúpidos. Si mi respuesta es correcta, gano \$100. Según yo tengo 80% de probabilidades de contestar correctamente la pregunta. Si mi respuesta es incorrecta, el juego se termina y no gano nada. Si mi respuesta es correcta, podría salir con \$100, o continuar y contestar una pregunta acerca de los programas de TV insulsos. Si mi respuesta a esta pregunta es correcta, gano otros \$300, y de lo contrario, pierdo todo lo que he ganado y todo termina. Mis posibilidades de contestar esta pregunta correctamente son de .60. Si doy una respuesta correcta a la pregunta acerca de los programas de TV insulsos, podría salir con mis "ganancias" o continuar y contestar una pregunta acerca de estadís-

TABLA 9

Situación en base	outs	Número de carreras	Número esperado
Corredor en primera	0		0.813
Corredor en primera	1		0.498
Corredor en segunda	1		0.671
Corredor en segunda	0		1.194
Ningún corredor en base	1		0.243

tica. Si doy una respuesta correcta a esta pregunta, gano otros $500, pero si fallo, pierdo todo y me regresan a casa. Mi probabilidad de contestar de manera acertada esta pregunta es de .40. Trace un árbol de decisión que se pueda usar para maximizar mis ganancias esperadas. ¿Cuáles son mis ganancias esperadas?

Grupo B

En muchos problemas de árbol de decisión, el objetivo de quien toma la decisión es maximizar la probabilidad de que ocurra un suceso favorable. Para incorporar este objetivo en un árbol de decisión, simplemente dé una recompensa de 1 a cualquier rama terminal que dé como resultado que ocurra el suceso favorable y una recompensa de 0 a cualquier rama terminal que dé como resultado que no ocurra el suceso favorable. Entonces, maximizar la recompensa esperada es lo mismo que maximizar la probabilidad de que ocurra el suceso favorable. Utilice esta idea para resolver los dos problemas siguientes.

9 El maestro de ajedrez estadounidense Jonathan Meller se enfrenta al experto soviético Yuri Gasparov, en un encuentro de exhibición de dos juegos. Cada triunfo da un punto al jugador y cada empate da medio punto. El jugador que tiene más puntos después de dos juegos, gana el partido. Si los jugadores están empatados después de dos juegos, continúan jugando hasta que uno gane un juego; entonces el primer jugador que gane un juego gana el partido. Durante cada juego, Meller tiene dos estrategias posibles: ser audaz o conservador. Sus probabilidades de ganar, perder o empatar cuando sigue cada estrategia, se muestran en la tabla 10. Para maximizar su probabilidad de ganar el partido, ¿qué debe hacer el estadounidense?

10 Yvonne Delaney se disputa con Chris Becker un solo punto para el campeonato de tenis mundial femenil. Ella ganó el volado y eligió servir. Si intenta un servicio con fuerza, su probabilidad de que la bola regrese al juego es de .60. Dado que el servicio con fuerza está en juego, tiene .60 de probabilidades de ganar el punto. Si intenta un servicio suave, su probabilidad de que le devuelvan el servicio es de .90, pero si el servicio suave está en juego, su probabilidad de ganar el punto es sólo .50. Para maximizar su probabilidad de ganar el punto, ¿qué debe hacer Yvonne?

11[†] Los Hoosiers de Indiana van atrás en el marcador por 14–0 ante los Boilermakers de Purdue en las postrimerías del último cuarto de un juego de futbol americano. El ángel de la guarda de Indiana les ha informado que antes de terminar el juego tendrán la bola dos veces más y anotarán un *touchdown* cada vez. El entrenador de Indiana es indiferente entre un empate y la siguiente lotería: 40% de probabilidades de vencer a Purdue y 60% de probabilidades de perder. El pateador de Indiana nunca ha fallado un punto extra e Indiana ha tenido éxito en el 35% de los intentos de conversión de dos puntos. Después de cada *touchdown* (que vale seis puntos), Indiana debe decidir si intenta o no un punto o una conversión de dos puntos. Ayude al entrenador de Indiana a maximizar su utilidad esperada.

12 Edwina, una intermediaria, tiene la opción de comprar 1000 oz de oro a $50 la onza. Si toma la opción y si el congreso disminuye las cuotas de importación, ella puede vender el oro en $80 la onza. Si toma la opción y el congreso no disminuye las cuotas de importación, la compañía perderá $10 por onza. Edwina cree que hay 50% de probabilidades de que el gobierno disminuya la cuota. Ella también tiene la opción de esperar hasta que el congreso decida si disminuye la cuota de importación. Si ella adopta esta estrategia, hay 70% de probabilidades de que algún otro intermediario haya tomado la opción.

a Si Edwina es neutral al riesgo, ¿qué debe hacer?

b Si la función de utilidad de Edwina para un cambio x en su estado de activos está dada por $u(x) = (10\,000 + x)^{1/2}$, ¿qué debe hacer?

TABLA 10

Estrategia	Ganar	Perder	Empatar
Audaz	.45	.55	0
Conservadora	0	.10	.90

13 Vamos a ver la película *Fatal Repulsion*. Hay tres lotes donde podemos estacionarnos. Uno está a una cuadra al este del cine (lote −1); uno está directamente atrás del cine (lote 0), y un lote está a una cuadra al oeste del cine (lote 1). Nos aproximamos al cine desde el este. Las probabilidades de que en el lote −1 haya lugar para estacionarse son 80%, 60% en el lote 0 y 80% en el lote 1. Una vez que se pasa un lote no es posible regresar. Suponga que cuando se está en un determinado lote de estacionamiento, se puede determinar si tiene lugares vacíos, pero no es posible ver ninguno de los otros lotes. Nuestras parejas nos aplicarán una penalización igual a la distancia (en cuadras) del estacionamiento al cine. Si no encontramos lugar nos aplicarán una penalización de 10 (y nunca saldrán de nuevo con nosotros). ¿Qué estrategia reduce nuestra penalización esperada? Conteste la misma pregunta si hay 70% de probabilidades de que el lote 0 tenga un espacio vacío.

14[‡] Un paciente entra al hospital con fuertes dolores abdominales. Con base en su experiencia, el médico Craig cree que hay 28% de probabilidades de que el paciente tenga apendicitis y 72% de probabilidades de que el paciente tenga dolores abdominales no específicos. El doctor Craig podría operar ahora o esperar 12 horas para poder dar un diagnóstico más preciso. En 12 horas, el doctor Craig estará seguro de si el paciente tiene apendicitis. El problema es que mientras tanto, el apéndice del paciente se podría perforar (si tiene apendicitis), lo cual haría más peligrosa la operación. De nuevo, con base en su experiencia, el doctor Craig cree que si espera 12 horas, hay 6% de probabilidades de que el paciente termine con el apéndice perforado, 22% de probabilidades de que el paciente termine con apendicitis "normal" y 72% de probabilidades de que el paciente termine con un dolor abdominal indeterminado. Con base en su experiencia el doctor Craig evalúa las probabilidades mostradas en la tabla 11 del paciente moribundo. Suponga que el objetivo del doctor Craig es maximizar la probabilidad de que el paciente sobreviva. Utilice un árbol de decisión para ayudar al doctor Craig a tomar la decisión correcta.

15 **a** Suponga que se le da a elegir entre las opciones siguientes:

A_1: Ganar con seguridad $30

A_2: 80% de probabilidades de ganar $45 y 20% de no ganar nada

[†]Basado en Porter (1967).

[‡]Basado en Clarke (1981).

TABLA 11

Solución	Probabilidad de que muera el paciente
Operación del paciente con apendicitis	.0009
Operación del paciente con dolor abdominal indeterminado	.0004
Operación en apéndice perforado	.0064
Ninguna operación en paciente con dolor abdominal indeterminado	0

B_1: 25% de probabilidades de ganar $30

B_2: 20% de probabilidades de ganar $45

La mayoría de las personas prefieren A_1 a A_2 y B_2 a B_1. Explique por qué este comportamiento viola la suposición de que quienes toman decisiones maximizan la utilidad esperada.

b Ahora suponga que usted juega el siguiente juego: usted tiene 75% de probabilidades de no ganar nada y 25% de jugar la segunda etapa del juego. Si usted llega a la segunda etapa, tiene dos opciones (C_1 y C_2), pero debe elegir ahora, antes de llegar a la segunda etapa.

C_1: ganar con seguridad $30

C_2: 80% de probabilidades de ganar $45

La mayoría de las personas eligen C_1 en vez de C_2 y B_2 en lugar de B_1 (del inciso a). Explique por qué esto viola de nuevo la suposición de maximización de la utilidad esperada. Tversky y Kahneman (1981) especulan que la mayoría de las personas son atraídas por los $30 seguros de la segunda etapa, ¡aunque es posible que no se llegue a ella! Observe que B_1 y C_1 dan $30 con la misma probabilidad y B_2 y C_2 dan $45 con la misma probabilidad. ¡Al parecer las personas no actúan de manera muy racional![†]

16 ¡Usted ha sido elegido para que aparezca en Hoosier Millionaire! Las reglas son las siguientes: hay cuatro cartas ocultas. Una dice "STOP" y las otras tres tienen cantidades en dólares de $150 000, $200 000 y $1 000 0000. Se tiene que elegir una carta. Si la carta dice "STOP", no se gana nada. En cualquier momento se puede salir y conservar la cantidad más grande de dinero que haya aparecido en alguna carta que haya elegido, o continuar. Sin embargo, si continúa y elige la carta que dice "STOP", no gana dinero. Por ejemplo, usted podría elegir la carta de $150 000, luego la carta de $200 000 y entonces podría optar por salir del juego y ¡recibir $200 000!

a Si su objetivo es maximizar su pago esperado, ¿qué estrategia debe seguir?

b Mi función de utilidad para un aumento de efectivo satisface $u(0) = 0$, $u(\$40{,}000) = .25$, $u(\$120{,}000) = .50$, $u(\$400{,}000) = .75$, y $u(\$1{,}000{,}000) = 1$. Después de trazar una curva a través de estos puntos, determine una estrategia que maximice mi utilidad esperada. Es posible que usted quiera usar su propia función de utilidad.

†Basado en Tversky y Kahneman (1981).

13.5 Regla de Bayes y árboles de decisión

El ejemplo de Colaco y muchos otros problemas de árbol de decisión comparten varias características comunes.

Hay varias situaciones del mundo. Diferentes situaciones del mundo producen diferentes beneficios a la persona que toma una decisión. En el ejemplo de Colaco, las dos situaciones del mundo fueron que Chocola es un éxito nacional (*EN*) o fracaso nacional (*FN*). Asimismo, se tenían (antes de llevar a cabo el lanzamiento inicial del producto, si es que se hace) estimaciones de las probabilidades de cada estado o situación del mundo. Éstas se llaman **probabilidades a priori.** En el ejemplo de Colaco, las probabilidades a priori son $p(EN) = .55$ y $p(FN) = .45$.

En diferentes estados del mundo, decisiones distintas podrían ser óptimas. En el ejemplo de Colaco, la compañía debe comercializar a nivel nacional si el estado del mundo es *EN* y no comercializar a nivel nacional si el estado del mundo es *FN*.

Podría ser deseable comprar información que dé a quien toma la decisión más conocimiento previo acerca del estado del mundo. Esto permitiría a una persona tomar mejores decisiones. Por ejemplo, en el ejemplo de Colaco, la información obtenida de promocionar el producto podría ayudar a Colaco a decidir si promociona Chocola a nivel nacional o no.

La persona que toma la decisión recibe información al observar los resultados de un experimento. Sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ los posibles estados del mundo y sean $o_1, o_2, \ldots, o_m$ los posibles resultados del experimento. A menudo, a quien toma la decisión se le dan las probabilidades condicionales $p(s_i|o_j)(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$. Con conocimiento del resultado del experimento, estas probabilidades dan nuevos valores para la probabilidad de cada estado del mundo. Las probabilidades $p(s_i|o_j)$ se llaman **probabilidades a posteriori.**

En el ejemplo de Colaco, el experimento fue el procedimiento de promocionar el producto y los dos resultados posibles fueron FL = fracaso local y EL = éxito local. Las probabilidades a posteriori fueron

$$p(EN|EL) = .85, \qquad p(EN|FL) = .10,$$
$$p(FN|EL) = .15, \qquad p(FN|FL) = .90$$

Así, el hecho de conocer el éxito del lanzamiento inicial del producto a nivel local, incrementaría en gran medida la estimación de Colaco de la probabilidad de éxito nacional, y el conocimiento de un fracaso en el lanzamiento inicial del producto a nivel local, disminuiría enormemente la estimación de Colaco de la probabilidad de un éxito nacional. Las probabilidades listadas se utilizaron para definir la bifurcaciones de suceso en el árbol de decisión que siguió la acción Promocionar el producto.

En muchas situaciones, sin embargo, se podrían tener las probabilidades a priori $p(s_i)$ para cada estado del mundo, y en lugar de tener las probabilidades a posteriori $p(s_i|o_j)$, se podrían tener las **posibilidades** $p(o_j|s_i)$. Para cada estado del mundo, las posibilidades dan la probabilidad de observar cada resultado experimental. Así, en el ejemplo de Colaco, se podrían tener las probabilidades a priori $p(EN) = .55$ y $p(FN) = .45$ y las probabilidades $p(EL|EN) = \frac{51}{55}$, $p(FN|EN) = \frac{4}{55}$, $p(EL|FN) = \frac{9}{45}$ y $p(FL|FN) = \frac{36}{45}$.

Para aclarar el significado de las posibilidades, suponga que 55 productos que han sido éxito nacional, habían sido promocionados con anterioridad; de estos 55 productos, 51 fueron éxitos locales y 4 fueron fracasos locales. Esto nos habría llevado a estimar $p(EL|EN)$ como $\frac{51}{55}$ y $p(FL|EN)$ como $\frac{4}{55}$.

Para completar el árbol de decisión de la figura 7, aún se necesita conocer las probabilidades a posteriori $p(EN|EL)$, $p(FN|EL)$, $p(EN|FL)$ y $p(FN|FL)$. Con la ayuda de la regla de Bayes (véase la sección 12.4), se pueden usar las probabilidades y posibilidades a priori para determinar las probabilidades a posteriori necesarias. Para empezar el cálculo de las probabilidades a posteriori, se necesitan determinar las probabilidades conjuntas de cada estado del mundo y el resultado experimental (es decir, debemos determinar $p(EN \cap EL)$, $p(EN \cap FL)$, $p(FN \cap EL)$ y $p(FN \cap FL)$). Obtenemos estas probabilidades conjuntas por medio de la definición de probabilidad condicional:

$$p(EN \cap EL) = p(EN)p(EL|EN) = .55(\tfrac{51}{55}) = .51$$
$$p(EN \cap FL) = p(EN)p(FL|EN) = .55(\tfrac{4}{55}) = .04$$
$$p(FN \cap EL) = p(FN)p(EL|FN) = .45(\tfrac{9}{45}) = .09$$
$$p(FN \cap FL) = p(FN)p(FL|FN) = .45(\tfrac{36}{45}) = .36$$

A continuación se calcula la probabilidad de cada resultado experimental posible (a menudo llamada *probabilidad marginal*) $p(EL)$ y $p(FL)$:

$$p(EL) = p(EN \cap EL) + p(FN \cap EL) = .51 + .09 = .60$$
$$p(FL) = p(EN \cap FL) + p(FN \cap FL) = .04 + .36 = .40$$

Ahora la regla de Bayes se puede aplicar para obtener las probabilidades a posteriori deseadas:

$$p(EN|EL) = \frac{p(EN \cap EL)}{p(EL)} = \frac{.51}{.60} = .85$$
$$p(FN|EL) = \frac{p(FN \cap EL)}{p(EL)} = \frac{.09}{.60} = .15$$
$$p(EN|FL) = \frac{p(EN \cap FL)}{p(FL)} = \frac{.04}{.40} = .10$$
$$p(FN|FL) = \frac{p(FN \cap FL)}{p(FL)} = \frac{.36}{.40} = .90$$

Estas probabilidades se pueden usar para completar el árbol de decisión de la figura 7.

En resumen, para encontrar las probabilidades a posteriori, se lleva a cabo el proceso de tres pasos siguiente:

Paso 1 Determine las probabilidades conjuntas de la forma $p(s_i \cap o_j)$ multiplicando la probabilidad a priori ($p(s_i)$) por la posibilidad ($p(o_j|s_i)$).

Paso 2 Determinar las probabilidades de cada resultado experimental $p(o_j)$ sumando las probabilidades conjuntas de la forma $p(s_k \cap o_j)$.

Paso 3 Determine cada probabilidad a posteriori ($p(s_i|o_j)$) dividiendo la probabilidad conjunta ($p(s_i \cap o_j)$) entre la probabilidad del resultado experimental o_j($p(o_j)$).

A continuación se da un ejemplo completo de un análisis de árbol de decisión que requiere usar la regla de Bayes.

EJEMPLO 5 Compañía Fruit Computer

La compañía Fruit Computer fabrica chips de memoria en lotes de diez chips. Por experiencia, Fruit sabe que 80% de los lotes contienen 10% (1 de cada 10) de chips defectuosos y 20% de los lotes contienen 50% (5 de cada 10) de chips defectuosos. Si se envía un lote bueno de chips (es decir, 10% de piezas defectuosas) al siguiente paso de producción, se incurre en costos de proceso de $ 1000, y si se envía un lote malo (50% de piezas defectuosas) al siguiente paso de producción, se incurre en costos de proceso de $4000. Fruit también tiene la opción de trabajar de nuevo un lote a un costo de $1000. Con seguridad un lote remodelado es un lote bueno. Por otro lado, por un costo de $100, Fruit puede probar un chip de cada lote en un intento por determinar si el lote es defectuoso. Determine cómo Fruit puede minimizar el costo total esperado por lote. También calcule el VEIM y el VEIP.

Solución Se multiplican los costos por -1 y se trabaja con la maximización $-$(costo total). Esto nos permite usar las fórmulas para el VEIM y el VEIP de la sección 13.4. Hay dos estados del mundo:

$$G = \text{el lote es bueno}$$
$$B = \text{el lote es malo}$$

Se tienen las probabilidades siguientes:

$$p(G) = .80 \qquad \text{y} \qquad p(B) = .20$$

Fruit tiene la opción de llevar a cabo un experimento: inspeccionar un chip por lote. Los resultados posibles del experimento son

$$D = \text{se observa un chip defectuoso}$$
$$ND = \text{se observa un chip no defectuoso}$$

Se tienen las siguientes posibilidades:

$$p(D|G) = .10, \qquad p(ND|G) = .90, \qquad p(D|B) = .50, \qquad P(ND|B) = .50$$

Para completar el árbol de decisión de la figura 12, es necesario determinar las probabilidades a posteriori $p(B|D)$, $p(G|D)$, $p(B|ND)$, y $p(G|ND)$. Se empieza por calcular las probabilidades conjuntas:

$$p(D \cap G) = p(G)p(D|G) = .80(.10) = .08$$
$$p(D \cap B) = p(B)p(D|B) = .20(.50) = .10$$
$$p(ND \cap G) = p(G)p(ND|G) = .80(.90) = .72$$
$$p(ND \cap B) = p(B)p(ND|B) = .20(.50) = .10$$

Luego se calcula la probabilidad de cada resultado experimental:

$$p(D) = p(D \cap G) + p(D \cap B) = .08 + .10 = .18$$
$$p(ND) = p(ND \cap G) + p(ND \cap B) = .72 + .10 = .82$$

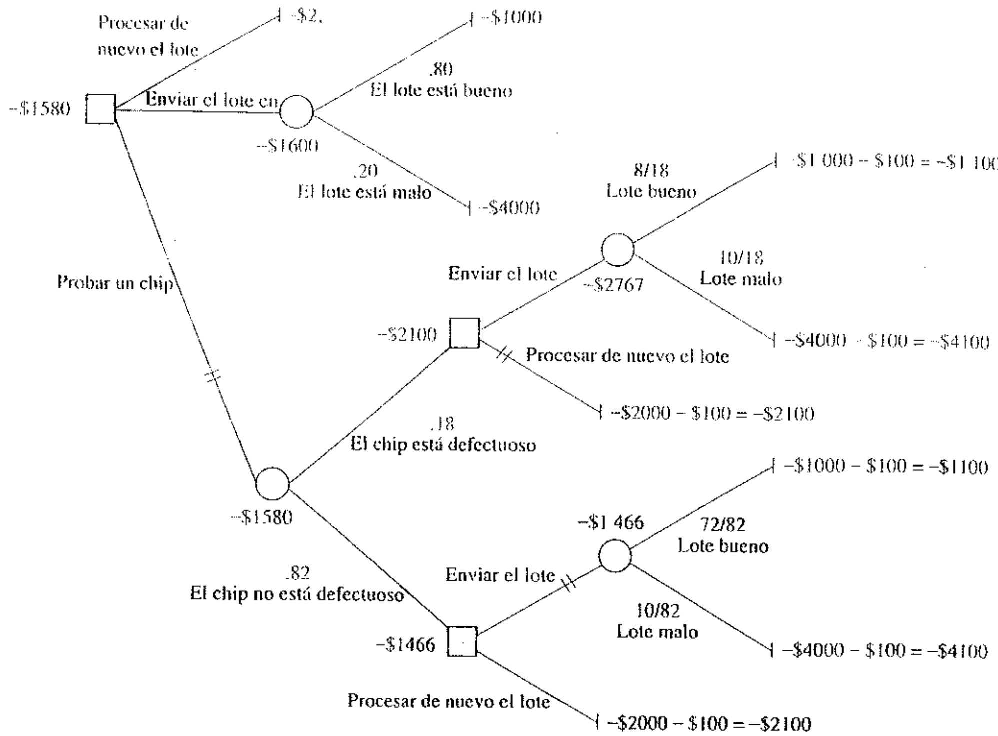


FIGURA 12
Ilustración del uso de la regla de Bayes en el árbol de decisión para Computer Co.

Luego, se utiliza la regla de Bayes para determinar las probabilidades a posteriori requeridas:

$$p(B|D) = \frac{p(D \cap B)}{p(D)} = \frac{.10}{.18} = \frac{5}{9}$$

$$p(G|D) = \frac{p(D \cap G)}{p(D)} = \frac{.08}{.18} = \frac{4}{9}$$

$$p(B|ND) = \frac{p(ND \cap B)}{p(ND)} = \frac{.10}{.82} = \frac{10}{82}$$

$$p(G|ND) = \frac{p(ND \cap G)}{p(ND)} = \frac{.72}{.82} = \frac{72}{82}$$

Estas probabilidades a posteriori se usan para completar el árbol de la figura 12. Los cálculos directos muestran cómo la estrategia óptima es probar un chip. Si el chip está defectuoso, vuelva a procesar el lote. Si el chip no está defectuoso, envíe el lote. Se incurre en un costo esperado de $1580.

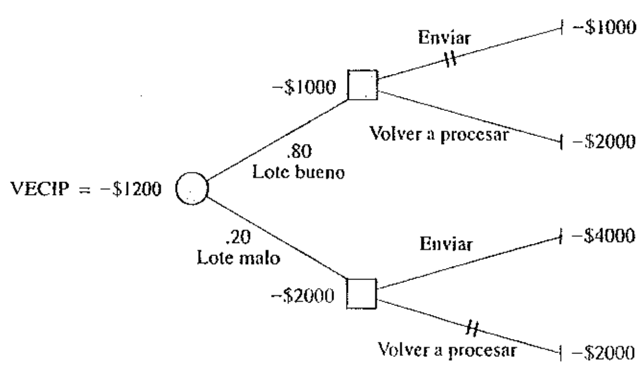


FIGURA 13
Valor esperado con información perfecta (VECIP) para Fruit Computer

Para encontrar el VEIM, suponga que probar un chip en un lote no cuesta nada. Entonces la rama Probar chip del árbol tendría su valor esperado incrementado por \$100 (a −\$1 480). Entonces se tendría VECIM = −\$1480 y VECIO = −\$1600. Entonces VEIM = VECIM − VECIO = −\$1480 − (−\$1600) = \$120.

Para encontrar el VEIP, se usa el árbol de la figura 13. Se encuentra que VECIP = −\$1 200. Entonces VEIP = VECIP − VECIO = −\$1200 − (−\$1600) = \$400.

Uso de LINGO para calcular las probabilidades a posteriori

El siguiente programa de LINGO se puede usar para calcular las probabilidades a posteriori para el ejemplo 5 (o cualquier otra situación).

```
MODEL:
   1]SETS:
   2]ST/G,B/:PR;
   3]OUT/D,ND/:MARG;
   4]SXO(ST,OUT):POST,JOINT,LIKE;
   5]ENDSETS
   6]DATA:
   7]PR=.8,.2;
   8]LIKE=.1,.9,.5,.5;
   9]ENDDATA
  10]@FOR(SXO(I,J):JOINT(I,J)=PR(I)*LIKE(I,J););
  11]@FOR(OUT(J):MARG(J)=@SUM(ST(I):JOINT(I,J)););
  12]@FOR(SXO(I,J):POST(I,J)=JOINT(I,J)/MARG(J););
  13]END
```

La línea 2 define los estados (G y B) y asocia una probabilidad a priori con cada estado. El usuario introduce las probabilidades a priori en la sección DATA del programa. La línea 3 define el conjunto de posibles resultados experimentales y asocia una probabilidad marginal con cada resultado. Los valores de MARG se calculan en la línea 11. En la línea 4, se crea el conjunto SXO, que consiste en (G, D), (G, ND), (B, D) y (B, ND), y asocia con cada miembro de este conjunto lo siguiente:

1 Una probabilidad posterior (POST); por ejemplo, POST$(G, D) = p(G|D)$. Los valores de POST se calculan en la línea 12.

2 Una probabilidad conjunta (JOINT); por ejemplo, JOINT$(G, ND) = p(G \cap ND)$. Los valores de JOINT se calculan en la línea 10.

3 Una posibilidad (LIKE); por ejemplo, LIKE$(B, D) = p(D|B)$. Las posibilidades se introducen en la sección DATA.

Las líneas 6−9 introducen los datos importantes. Recuerde que los atributos con varios subíndices (como SXO) se almacenan de manera que los subíndices de la derecha avancen con más rapidez. Esto ayuda a determinar el orden en el que se introducen los valores de LIKE.

En la línea 10, se calculan las probabilidades conjuntas JOINT(I, J) multiplicando la probabilidad a priori PR(I) por la posibilidad LIKE(I, J). En la línea 11 se calcula cada probabilidad marginal MARG(J) sumando en I las probabilidades conjuntas en donde interviene J. En la línea 12, se calcula la probabilidad posterior o a posteriori POST(I, J) (en realidad ésta es $p(I|J)$) dividiendo $p(I \cap J)$ entre la probabilidad marginal del resultado $J(p(J))$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un cliente acudió a su banco por un préstamo anual de 50 000 dólares a una tasa de interés de 12%. Si el banco no aprueba el préstamo, los $50 000 se invertirán en bonos que obtienen un rendimiento anual de 6%. Sin más información, el banco considera que hay 4% de probabilidades de que el cliente incumpla por completo el pago del préstamo. Si el cliente no paga, el banco pierde $50 000. A un costo de $500, el banco puede investigar el registro de crédito del cliente y suministrar una recomendación favorable o desfavorable. Por experiencia se sabe que

$$p(\text{recomendación favorable}|\text{el cliente no incumple}) = \tfrac{77}{96}$$

$$p(\text{recomendación favorable}|\text{el cliente incumple}) = \tfrac{1}{4}$$

¿Cómo puede maximizar el banco sus ganancias esperadas? También encuentre el VEIM y el VEIP.

2 Una nucleoeléctrica está por decidir si construye una planta nuclear o no en Diablo Canyon o en Roy Rogers City. El costo de construir la planta es de 10 millones de dólares en Diablo y $20 millones en Roy Rogers City. Sin embargo, si la compañía construye en Diablo y ocurre un terremoto durante los cinco años siguientes, la construcción se terminará y la compañía perderá $10 millones (y todavía tendrá que construir una planta en Roy Rogers City). A priori, la compañía cree que las probabilidades de que ocurra un terremoto en Diablo durante los cinco años siguientes son de 20%. Por 1 millón de dólares, se puede contratar un geólogo para analizar la estructura de la falla en Diablo Canyon. Él predecirá si ocurre un terremoto o no. El historial del geólogo indica que predecirá la ocurrencia de un terremoto 95% de las veces y la no ocurrencia 90% de las veces. ¿La compañía debe contratar al geólogo? También encuentre el VEIM y el VEIP.

3 El agricultor Jones debe determinar si siembra maíz o trigo. Si siembra maíz y el clima es cálido, obtiene $8000; si siembra maíz y el clima es frío, obtiene $5000. Si siembra trigo y el clima es cálido, obtiene $7000; si siembra trigo y el clima es frío, obtiene $6500. En el pasado, 40% de los años han sido fríos y 60% han sido cálidos. Antes de sembrar, Jones puede pagar 600 dólares por un pronóstico del clima emitido por un experto. Si en realidad el año es frío, hay 90% de posibilidades de que el meteorólogo prediga un año frío. Si el año en realidad es cálido, hay 80% de posibilidades de que el meteorólogo prediga un año cálido. ¿Cómo puede maximizar Jones sus ganancias esperadas? También obtenga el VEIM y el VEIP.

4 La red de televisión NBS obtiene un promedio de 400 000 dólares de un buen espectáculo y pierde un promedio de $100 000 en un fracaso. De los espectáculos que analiza la red, 25% resultan ser éxitos y 75% resultan ser fracasos. Por 40 000 dólares, una empresa de investigación de mercado pedirá a una audiencia que vea un programa piloto de un espectáculo probable y dé su punto de vista acerca de si el espectáculo será un éxito o un fracaso. Si el espectáculo en realidad va a ser un éxito, hay 95% de probabilidades de que la empresa de investigación de mercado prediga que el espectáculo será un éxito. Si en realidad el espectáculo va a ser un fracaso, hay 80% de probabilidades de que la empresa de investigación de mercado prediga que el espectáculo será un fracaso. Determine cómo la red puede maximizar sus ganancias esperadas. También obtenga el VEIM y el VEIP.

5 Se está considerando filmar la historia de Don Harnett. Se sabe que si la película es un fracaso, se perderán 4 millones de dólares, y si la película es un éxito, se obtendrán $15 millones. De antemano, se cree que hay una probabilidad de 10% que la historia de Don Harnett sea un éxito. Antes de filmar, se tiene la opción de pagar al célebre crítico de cine Roger Alert 1 millón de dólares por su punto de vista acerca de la película. En el pasado, Alert ha predicho 60% de los éxitos actuales como éxitos y 90% de los fracasos actuales como fracasos. Se quieren maximizar las ganancias esperadas. Utilice un árbol de decisión para determinar la mejor estrategia. ¿Cuál es el VEIM? ¿Cuál es el VEIP?

Grupo B

6 Abdul tiene un dado en su mano izquierda y otro en su mano derecha. Un dado tiene seis puntos pintados en cada cara y el otro tiene un punto pintado en dos de las caras y seis puntos pintados en cada una de las otras cuatro caras. Greta va a seleccionar un dado (ya sea el izquierdo o el derecho) y recibirá 10 dólares por cada punto pintado en el dado elegido. Antes de elegir, Gretta podría pagar a Abdul 15 dólares y él lanzará el dado de su mano izquierda y le dirá cuántos puntos están pintados en la cara superior. Utilice un árbol de decisión para determinar cómo maximizar la ganancia de Greta. También determine al VEIM y al VEIP.

7 Pat Sajork tiene dos cajones. Uno contiene tres monedas de oro y el otro contiene una moneda de oro y dos de plata. Se permite elegir un cajón y se pagarán 500 dólares por cada moneda de oro y $100 por cada moneda de plata en el cajón. Antes de elegir, se podría pagar a Pat $200, y sacará una moneda elegida al azar (cada una de las seis monedas tiene una probabilidad igual de ser elegida) y dirá si es de oro o plata. Por ejemplo, Pat podría decir que extrajo una moneda de oro del cajón 1. ¿Se debe pagar a Pat $200? ¿Cuál es el VEIM? ¿Cuál es el VEIP?

8 Joe posee una moneda no cargada y una que tiene dos caras. Imelda cree que hay una probabilidad de 1/2 de que la moneda tenga dos caras. Ella debe adivinar qué clase de moneda tiene Joe. Si ella acierta, no le paga nada a Joe, pero si se equivoca debe pagar a Joe 2 dólares. Antes de adivinar, ella podría pagar 30¢ por ver el resultado de un solo lanzamiento de la moneda (caras o cruces). Determine cómo Imelda debe minimizar su pérdida esperada. También determine el VEIM y el VEIP.

9 El gobierno está intentando determinar si se debe examinar a los inmigrantes para detectar una enfermedad contagiosa. Supóngase que la decisión se tomará con respecto a una base financiera. Suponga que cada inmigrante que ingresa al país y padece una enfermedad contagiosa le cuesta a Estados Unidos 100 000 dólares y cada inmigrante que entra al país y no está enfermo contribuye con 10 000 dólares a la economía nacional. Suponga que 10% de los posibles inmigrantes tienen una enfermedad contagiosa. El gobierno podría admitir a los inmigrantes, no admitirlos o examinarlos para ver si están enfermos antes de determinar si deben ser admitidos. Cuesta 100 dólares probar si una persona tiene una enfermedad contagiosa; el resultado de la prueba es positivo o negativo. Si el resultado es positivo, la persona en *definitiva* está enferma. Sin embargo, en 20% de las personas enfermas el resultado del análisis es negativo. De una persona sana siempre se obtiene un resultado negativo. El objetivo del gobierno es maximizar (por cada posible inmigrante) los beneficios esperados menos los costos esperados. Utilice un árbol de decisión como ayuda en este cometido. También determine el VEIM y el VEIP.

10[†] Muchos colegios enfrentan el problema de si se debe examinar a los atletas en busca de fármacos. Defina

[†]Basado en Feinstein (1990).

c_1 = Costo de si se acusa al atleta falsamente de uso de drogas

c_2 = Costo de si no se identifica a uno que utilice drogas

c_3 = Costo debido a la invasión de la privacidad si se examina a un atleta que no utilice drogas.

Suponga que 5% de los atletas utilizan drogas y que el examen utilizado es confiable en 90%. Esto significa que si el atleta utiliza drogas, hay 90% de probabilidades de que se detectará en el análisis, y si el atleta no utiliza drogas, las probabilidades de que el análisis no muestre uso de drogas son de 90%.

a Si $c_1 = 10$, $c_2 = 5$ y $c_3 = 1$, ¿debe el colegio examinar a los atletas en busca de drogas?

b Demuestre que si $c_1 > c_2 > c_3$, entonces el colegio no debe llevar a cabo exámenes para detectar el uso de drogas en los atletas.

13.6 Toma de decisiones con objetivos múltiples

En los problemas de decisión considerados antes, quien toma la decisión hizo una elección con base en cómo cada acción posible afectó una sola variable (o atributo). Por ejemplo, en el problema del vendedor de periódicos, el número de periódicos ordenados se determinó por cómo esto afectó las ganancias de Phylis. De manera similar, en el ejemplo de Colaco, la decisión de esta compañía depende de cómo cada una de sus estrategias afectó su estado final de activos.

Sin embargo, en muchas situaciones la acción elegida depende de cómo cada acción posible afecta a más de un atributo o variable. A continuación se dan cuatro ejemplos. (1) Suponga que Joe Bunker quiere comprar un automóvil nuevo. Para elegir qué automóvil comprar, Joe podría considerar los atributos siguientes del automóvil:

Atributo 1 Tamaño del automóvil

Atributo 2 Economía de combustible del automóvil (millas por galón)

Atributo 3 Estilo del automóvil

Atributo 4 Precio del automóvil

(2) Suponga que Joe Bunker se acaba de graduar en la escuela superior de comercio de la nación, la Business School (B.S.) University, y recibió cinco ofertas de trabajo. Al elegir cuál aceptar, Joe considerará los siguientes atributos de cada trabajo:

Atributo 1 Salario inicial del empleo

Atributo 2 Ubicación del lugar de trabajo

Atributo 3 Grado de interés que Joe tiene al hacer el trabajo relacionado con el empleo

Atributo 4 Oportunidades de largo plazo asociadas con el empleo

(3) Gotham City debe determinar dónde localizar un nuevo aeropuerto para aviones de propulsión a chorro. Para determinar el sitio se deben considerar tres factores (o atributos):

Atributo 1 Accesibilidad del aeropuerto para los residentes de Gotham City

Atributo 2 Grado de contaminación por ruido causado por el aeropuerto (si el aeropuerto se coloca en un área con alta densidad de población, la contaminación por ruido será más grave que si el aeropuerto se coloca en un área con baja densidad de población.

Atributo 3 Tamaño del aeropuerto (determinado en parte por la cantidad de tierra disponible en el sitio del aeropuerto)

(4) Wivco Toy Corporation está introduciendo un nuevo producto (un *globot*). Wivco debe determinar el precio a cobrar por cada globot. Dos factores (participación de mercado y ganancias) afectarán la decisión de evaluación.

En estos cuatro ejemplos, quien toma la decisión elige una acción determinando cómo cada acción posible afecta los atributos importantes. A estos problemas se les conoce como **problemas de decisión multiatributos.**

Toma de decisiones multiatributos en ausencia de incertidumbre: programación por objetivos

Suponga que una mujer cree que hay n atributos que determinarán su decisión. Sea $x_i(a)$ el valor del i-ésimo atributo asociado con una alternativa a. Ella asocia un valor $v(x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))$ con la alternativa a. La función $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la **función de valor** de quien toma la decisión. Si A representa el conjunto de decisiones posibles de quien toma la decisión, entonces ella debe elegir la alternativa a^* (con nivel x_i^* del atributo i) que satisface

$$\max_{a\in A} v(x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)) = v(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

Alternativamente, quien toma la decisión puede asociar un costo $c(x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))$ con la alternativa a. La función $c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es su **función de costo.** Si A representa el conjunto de decisiones posibles de quien toma la decisión, entonces ella debe elegir la alternativa a^* (con nivel x_i^* del atributo i) que satisface

$$\min_{a\in A} c(x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)) = c(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

Una forma particular de la función de valor o costo es de interés especial.

DEFINICIÓN ■ Una función de valor $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una **función de valor aditiva** si existen n funciones $v_1(x_1), v_2(x_2), \ldots, v_n(x_n)$ que satisface

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} v_i(x_i) \quad ■ \tag{7}$$

Una función de costo $c(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una **función de costo aditiva** si existen n funciones $c_1(x_1), c_2(x_2), \ldots, c_n(x_n)$ que satisface

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i(x_i) \quad ■ \tag{8}$$

¿En qué condiciones una persona que toma una decisión tiene una función de valor (o costo) aditiva? Antes de contestar esta pregunta, se necesitan otras definiciones.

DEFINICIÓN ■ Un atributo (llámelo atributo 1) es **preferencialmente independiente** (pi) de otro atributo (atributo 2) si las preferencias para los valores del atributo 1 no dependen del valor del atributo 2. ■

Para ilustrar el concepto de independencia preferencial, se considera la búsqueda de un empleo por parte de Joe después de su graduación. En este caso, el atributo 1 sería preferencialmente independiente del atributo 2 si, para alguna ubicación posible del trabajo, se prefiere un salario inicial mayor a un salario menor.

Como otra ilustración de la independencia preferencial, suponga que la familia Griswold está tratando de determinar cómo pasar la tarde del domingo. Sean los dos atributos pertinentes

Atributo 1 Elección de la actividad (ya sea un día de campo o ir al cine a ver *Antarctic Vacation*)

Atributo 2 Clima de la tarde del domingo (ya sea soleado o lluvioso)

Suponga que en un día soleado, se prefiere ir de día de campo que al cine, pero en un día lluvioso, se da preferencia a ir al cine que al día de campo. El atributo 1 no es preferencialmente independiente del atributo 2.

DEFINICIÓN ■ Si el atributo 1 es pi del atributo 2 y el atributo 2 es pi del atributo 1, entonces el atributo 1 es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) del atributo 2. ■

De nuevo refiérase la búsqueda de empleo de Joe. Suponga que las cinco ofertas de empleo de Joe se localizan en Los Ángeles, Chicago, Dallas, Nueva York e Indianápolis. Si, para algún nivel de salario determinado, Joe prefiere trabajar en Los Ángeles, entonces el atributo 2 es pi del atributo 1. Si el atributo 1 fuera también pi del atributo 2, entonces los atributos 1 y 2 serían mpi.

El concepto de independencia mutua y preferencial se puede generalizar a un conjunto de atributos.

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de atributos S es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) de un conjunto de atributos S' si (1) los valores de los atributos en S' no afectan las preferencias para los valores de atributos en S, y (2) los valores de los atributos en S no afectan las preferencias para los valores de los atributos en S'. ■

En el ejemplo de la compra de un automóvil nuevo por parte de Joe, sea S = atributos 1 y 2 y S' = atributos 3 y 4. Entonces para que S sea mpi de S', debe ser el caso que (1) las preferencias de Joe por el tamaño y la economía de combustible no sean afectadas por un estilo y precio de automóvil, y (2) las preferencias de Joe por el estilo y precio del automóvil no son afectadas por el tamaño y economía de combustible del automóvil. Así, si S y S' fueran mpi, se podría concluir que si para un estilo determinado y nivel de precio, Joe prefirió A_1 (un automóvil grande con un rendimiento de 15 mpg) a A_2 (un automóvil pequeño que logra 25 mpg), entonces para cualquier estilo y nivel de precio, Joe preferiría A_1 a A_2.

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) si para los subconjuntos S de $\{1, 2, \ldots, n\}$, S es mpi de $\bar{S}$. ($\bar{S}$ son los miembros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no están incluidos en S.) ■

Es fácil ver que si hay sólo dos atributos (1 y 2), los atributos son mpi si y sólo si el atributo 1 es mpi del atributo 2.

El resultado siguiente da una condición que asegura que quien toma la decisión tendrá una función de valor (o costo) aditiva.

TEOREMA 1

Si el conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es mpi, las preferencias de quien toma la decisión se pueden representar por una función de valor (o costo) aditiva.

Éste no es un resultado obvio. (Para una demostración, véanse Keeney y Raiffa (1976, capítulo 3).) Para ilustrar el resultado, suponga que la función de valor de quien toma la decisión para dos atributos está dada por

$$v(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 + x_2 \tag{9}$$

Una persona que toma una decisión con la función de valor (2) preferiría, por ejemplo, (6, 6) a (4, 8) (debido a que $v(6, 6) = 48$ y $v(4, 8) = 44$). El lector debe verificar que para (2), el atributo 1 es pi del atributo 2 y el atributo 2 es pi del atributo 1 (véase el problema 3 al final de esta sección). Así, los atributos 1 y 2 son mpi y el teorema 1 implica que las preferencias de quien toma la decisión se pueden representar por una función aditiva. Para demostrar esto, defina nuevos atributos 1′ y 2′ como

$$\text{Valor del atributo } 1' = x_1' = x_1 + x_2$$
$$\text{Valor del atributo } 2' = x_2' = x_1 - x_2$$

Considere la función de valor aditiva

$$v'(x_1', x_2') = x_1' + \frac{(x_1')^2}{4} - \frac{(x_2')^2}{4}$$

Es fácil demostrar que $v'(x_1', x_2') = v(x_1, x_2)$. Así, $v'(x_1', x_2')$ representa las preferencias de quien toma la decisión. Por ejemplo, de las dos alternativas siguientes

$$\text{Alternativa 1: } x_1 = 6, x_2 = 6$$
$$\text{Alternativa 2: } x_1 = 4, x_2 = 8$$

ya se sabe que quien toma la decisión prefiere la alternativa 1. En términos de nuevos atributos 1′ y 2′, se tiene

$$\text{Alternativa 1: } x_1' = 12, x_2' = 0$$
$$\text{Alternativa 2: } x_1' = 12, x_2' = -4$$

Entonces

$$v'(12, 0) = \text{valor de la alternativa 1} = 12 + \frac{12^2}{4} = 48$$
$$v'(12, -4) = \text{valor de la alternativa 2} = 12 + \frac{12^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4} = 44$$

Por consiguiente, en este ejemplo, la función de valor aditiva $v'(x_1', x_2')$ duplica las preferencias de quien toma la decisión.

Funciones de utilidad multiatributos

En la sección 13.2, se describe cómo se podría usar la teoría de utilidad de Von Neumann-Morgenstern para tomar decisiones bajo incertidumbre cuando sólo un atributo afectó la preferencia y la actitud hacia el riesgo de quien toma la decisión. En esta sección, se analiza la extensión de la teoría de la utilidad para situaciones en las que más de un atributo afecta las preferencias y la actitud hacia el riesgo de quien toma la decisión. Incluso en este caso, una persona que toma decisiones y acepta los axiomas de Von Neumann-Morgenstern aún elegirá la lotería o la alternativa que maximiza su utilidad esperada. Cuando más de un atributo afecta las preferencias de quien toma decisiones, la función de utilidad de la persona se llama **función de utilidad multiatributos.** Aquí nos restringimos a explicar cómo evaluar y usar las funciones de utilidad multiatributos cuando son funcionales sólo dos atributos. El lector que busca una explicación más detallada de las funciones de utilidad multiatributos se le recomienda consultar Bunn (1984) y (a un nivel más avanzado) el trabajo clásico de Keeney y Raiffa (1976).

Suponga que las preferencias y la actitud hacia el riesgo de quien toma decisiones dependen de dos atributos. Sea

$$x_i = \text{nivel del atributo } i$$
$$u(x_1, x_2) = \text{utilidad asociada con el nivel } x_1 \text{ del atributo 1 y nivel } x_2 \text{ del atributo 2}$$

¿Cómo se puede encontrar una función de utilidad $u(x_1, x_2)$ tal que elegir una lotería o alternativa que maximiza el valor esperado de $u(x_1, x_2)$ producirá una decisión consistente con las preferencias y actitud hacia el riesgo de quien toma decisiones?

En general, la determinación de $u(x_1, x_2)$ (o bien, en el caso de n atributos, la determinación de $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) es una cuestión difícil. Sin embargo, en ciertas condiciones se simplifica mucho la evaluación de una función de utilidad $u(x_1, x_2)$.

Propiedades de funciones de utilidad multiatributos

DEFINICIÓN ■ El atributo 1 es **independiente de la utilidad** (iu) del atributo 2 si las preferencias para las loterías que tienen que ver con diferentes niveles del atributo 1 no dependen del nivel del atributo 2.

Considérese el problema de Wivco Toy Corporation. Wivco está introduciendo un nuevo producto (un globot) y debe determinar qué precio cargar por cada globot. Dos factores (participación en el mercado y ganancias) afectarán la decisión de evaluación de Wivco. Sea

x_1 = participación en el mercado de Wivco

x_2 = ganancias de Wivco (millones de dólares)

Suponga que Wivco es indiferente entre

$$L_1: \begin{cases} \frac{1}{2} & 10\%, \$5 \\ \frac{1}{2} & 30\%, \$5 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_1' \xrightarrow{\;1\;} 16\%, \$5$$

Si el atributo 1 (participación en el mercado) es iu del atributo 2 (ganancia), Wivco también sería indiferente entre

$$L_2: \begin{cases} \frac{1}{2} & 10\%, \$20 \\ \frac{1}{2} & 30\%, \$20 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2' \xrightarrow{\;1\;} 16\%, \$20$$

En resumen, si la participación en el mercado es iu de la ganancia, entonces para cualquier nivel de ganancias, una probabilidad de $\frac{1}{2}$ en una participación de mercado de 10% y una probabilidad $\frac{1}{2}$ en una participación de mercado de 30% tiene un equivalente de certidumbre de una participación en el mercado de 16%.

DEFINICIÓN ■ Si el atributo 1 es iu del atributo 2, y el atributo 2 es iu del atributo 1, entonces los atributos 1 y 2 son **mutuamente independientes de la utilidad** (miu).

Si los atributos 1 y 2 son miu, se puede demostrar que la función de utilidad de quien toma la decisión $u(x_1, x_2)$ deben ser de la forma siguiente:

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_1(x_1)u_2(x_2) \tag{10}$$

En (10), k_1, k_2 y k_3 son constantes y $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$ son funciones de x_1 y x_2, respectivamente. La ecuación (10) se llama **función de utilidad multilineal.**

Para demostrar que una función de utilidad multilineal se puede identificar como miu, se supone que la función de utilidad de Wivco es de la forma (10) y que Wivco es indiferente entre L_1 y L_1'. Si Wivco se identifica como miu, entonces Wivco también debe ser indiferente entre L_2 y L_2'. Por medio de la ecuación (10) se puede demostrar que $L_1 \text{i} L_1'$ implica que $L_2 \text{i} L_2'$. Primero, (10) y $L_1 \text{i} L_1'$ implican

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}[k_1u_1(10) + k_2u_2(5) + k_3u_1(10)u_2(5)] \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}[k_1u_1(30) + k_2u_2(5) + k_3u_1(30)u_2(5)] \\ &\qquad = k_1u_1(16) + k_2u_2(5) + k_3u_1(16)u_2(5) \end{aligned}$$

Al simplificar esta ecuación se obtiene (si $k_1 \neq 0$)

$$\tfrac{1}{2}[u_1(10) + u_1(30)] = u_1(16) \tag{11}$$

Con (11) se encuentra que

$$\begin{aligned} E(U \text{ para } L_2) &= \tfrac{1}{2}[k_1u_1(10) + k_2u_2(20) + k_3u_1(10)u_2(20)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}[k_1u_1(30) + k_2u_2(20) + k_3u_1(30)u_2(20)] \\ &= k_1u_1(16) + k_2u_2(20) + k_3u_1(16)u_2(20) \\ &= E(U \text{ para } L_2') \end{aligned}$$

Así, se ve que una función de utilidad multilineal de la forma (10) implica que el atributo 1 es iu del atributo 2. De manera similar, se puede demostrar que (10) implica que el atributo 2 es iu del atributo 1. Por consiguiente, (10) implica que los atributos 1 y 2 son miu. También se puede demostrar que si x_1 y x_2 son miu, entonces $u(x_1, x_2)$ debe ser de la forma (10) (véanse Keeney y Raiffa (1976)).

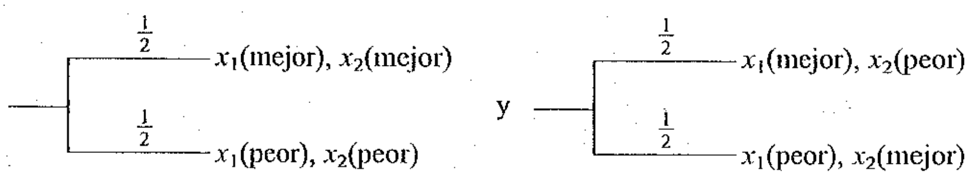
TEOREMA 2

Los atributos 1 y 2 son miu si y sólo si la función de utilidad de quien toma la decisión $u(x_1, x_2)$ es una función multilineal de la forma

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_1(x_1)u_2(x_2) \tag{10}$$

La determinación de una función de utilidad de quien toma decisiones $u(x_1, x_2)$ se puede simplificar más si muestra **independencia aditiva.** Antes de definir la independencia aditiva, se debe definir x_1(mejor) o x_2(mejor) como el nivel más favorable del atributo 1 o 2 que puede ocurrir; también x_1(peor) o x_2(peor) es el nivel menos favorable del atributo 1 o 2 que puede ocurrir.

DEFINICIÓN ■ La función de utilidad de quien toma decisiones exhibe independencia aditiva si quien toma decisiones es indiferente entre



(11) ■

En esencia, la independencia aditiva de los atributos 1 y 2 implica que las preferencias sobre las loterías que tienen que ver sólo con el atributo 1 (o sólo con el atributo 2) dependen únicamente de la distribución marginal para los valores posibles del atributo 1 (o del atributo 2) y no dependen de la distribución conjunta de los valores posibles de los atributos 1 y 2.

Si los atributos 1 y 2 son miu y la función de utilidad de quien toma decisiones muestra independencia aditiva, es fácil mostrar que en (10), se debe cumplir $k_3 = 0$. Como en la sección 2.2, simplemente escale $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$ tal que

$$u_1(x_1(\text{mejor})) = 1 \qquad u_1(x_1(\text{peor})) = 0$$
$$u_2(x_2(\text{mejor})) = 1 \qquad u_2(x_2(\text{peor})) = 0$$

Ahora (10) implica

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) = k_1 + k_2 + k_3 \qquad u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor})) = 0$$
$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{peor})) = k_1 \qquad u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{mejor})) = k_2$$

Entonces la independencia aditiva implica que

$$\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3) + \tfrac{1}{2}(0) = \tfrac{1}{2}(k_1) + \tfrac{1}{2}(k_2)$$
$$k_3 = 0$$

Así, los atributos 1 y 2 son miu y la función de utilidad de quien toma la decisión muestra independencia aditiva, su función de utilidad es de la forma aditiva siguiente:

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) \tag{12}$$

Evaluación de funciones de utilidad multiatributos

Si los atributos 1 y 2 son miu, ¿cómo podemos determinar $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, k_1, k_2, y k_3? Para determinar $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, se aplica la técnica que se utilizó para evaluar la función de utilidad en la sección 13.2. Se ilustra mediante la determinación de $u_1(x_1)$. Sea $u_1(x_1(\text{mejor})) = 1$ y $u_1(x_1(\text{peor})) = 0$. A continuación determine un valor del atributo 1 (llámelo $x_1(\frac{1}{2})$) con $u_1(x_1(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$. Por la definición de $u_1(x_1(\frac{1}{2}))$ y miu, quien toma la decisión es (para cualquier valor de x_2) indiferente entre

$$L \;\begin{cases} \xrightarrow{\;\frac{1}{2}\;} & x_1(\text{mejor}), x_2 \\[1ex] \xrightarrow{\;\frac{1}{2}\;} & x_1(\text{peor}), x_2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \bar{L} \xrightarrow{\quad 1 \quad} x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2$$

Así, $x_1(\frac{1}{2})$ se podría determinar a partir del hecho que el equivalente de certidumbre de L es $(x_1(\frac{1}{2}), x_2)$. De un modo similar, se pueden determinar los valores $x_1(\frac{1}{4})$ y $x_1(\frac{3}{4})$ del primer atributo que satisface $u_1(x_1(\frac{1}{4})) = \frac{1}{4}$ y $u_1(x_1(\frac{3}{4})) = \frac{3}{4}$. Continuando de este modo, podemos aproximar $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$.

Para encontrar k_1, k_2 y k_3, se empieza por cambiar la escala de $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$ y $u(x_1, x_2)$ tal que

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) = 1, \qquad u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor})) = 0,$$
$$u_1(x_1(\text{mejor})) = 1, \qquad u_1(x_1(\text{peor})) = 0, \qquad u_2(x_2(\text{mejor})) = 1, \qquad u_2(x_2(\text{peor})) = 0$$

Ahora, de (10) se obtiene

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{peor})) = k_1(1) + k_2(0) + k_3(0) = k_1$$

Por consiguiente, k_1 se puede determinar a partir del hecho que quien toma la decisión es indiferente entre

$$\xrightarrow{\quad 1 \quad} u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{peor})) \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \xrightarrow{\;k_1\;} & u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) \\[1ex] \xrightarrow{\;1 - k_1\;} & u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor})) \end{cases}$$

De manera similar (véase el problema 3 al final de esta sección), $u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{mejor})) = k_2$ y k_2 se puede determinar del hecho que quien toma la decisión es indiferente entre

$$\xrightarrow{\quad 1 \quad} u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{mejor})) \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \xrightarrow{\;k_2\;} & u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) \\[1ex] \xrightarrow{\;1 - k_2\;} & u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor})) \end{cases}$$

Para determinar k_3, observe que de (10) y

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) = u_1(x_1(\text{mejor})) = u_2(x_2(\text{mejor})) = 1$$

se encuentra que

$$1 = u(x_1(\text{best}), x_2(\text{best})) = k_1(1) + k_2(1) + k_3(1) = k_1 + k_2 + k_3$$

Así, $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, o bien, $k_3 = 1 - k_1 - k_2$. Por supuesto, si la función de utilidad de quien toma la decisión muestra independencia aditiva, entonces $k_3 = 0$.

El procedimiento a usar en la evaluación de una función de utilidad multiatributos (cuando hay dos atributos) se podría resumir como sigue:

Paso 1 Compruebe si los atributos 1 y 2 son miu. En caso afirmativo, vaya al paso 2. Si los atributos no son miu, la evaluación de la función de utilidad multiatributos queda fuera del alcance de este análisis. (Véanse Keeney y Raiffa (1976, Sección 5.7).)

Paso 2 Compruebe la independencia aditiva.

Paso 3 Evalúe $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$.

Paso 4 Determine k_1, k_2 y (si no hay independencia aditiva) k_3.

Paso 5 Compruebe si la función de utilidad evaluada en realidad es consistente con las preferencias de quien toma la decisión. Para hacer esto, prepare varias loterías y utilice la utilidad esperada de cada una para clasificar las loterías de la más favorable a la menos favorable. Si la función de utilidad evaluada es consistente con las preferencias de quien toma la decisión, la clasificación de las loterías obtenida de la función de utilidad evaluada se debe parecer mucho a la clasificación de las loterías de quien toma la decisión.

En el ejemplo 6 se ilustra la evaluación y uso de la función de utilidad multiatributos.

EJEMPLO 6 Fruit Computer Co.

La compañía Fruit Computer está segura de que su participación en el mercado durante 2005 estará entre 10% y 50% del mercado de microcomputadoras. Fruit también está segura de que sus ganancias durante 2005 estarán entre \$5 millones y \$30 millones. Evalúe la función de utilidad multiatributos donde $u(x_1, x_2)$, donde

$$x_1 = \text{participación en el mercado de Fruit durante 2005}$$
$$x_2 = \text{ganancia de Fruit durante 2005 (en millones de dólares)}$$

Solución Se empieza por comprobar si los atributos son miu. Es útil trazar un diagrama (véase la figura 14) que muestra varios niveles de cada atributo. Primero se comprueba si el atributo 1 (participación en el mercado) es iu del atributo 2 (ganancia). Se solicita a Fruit el equivalente de certidumbre de una probabilidad $\frac{1}{2}$ en la peor participación en el mercado (10%)

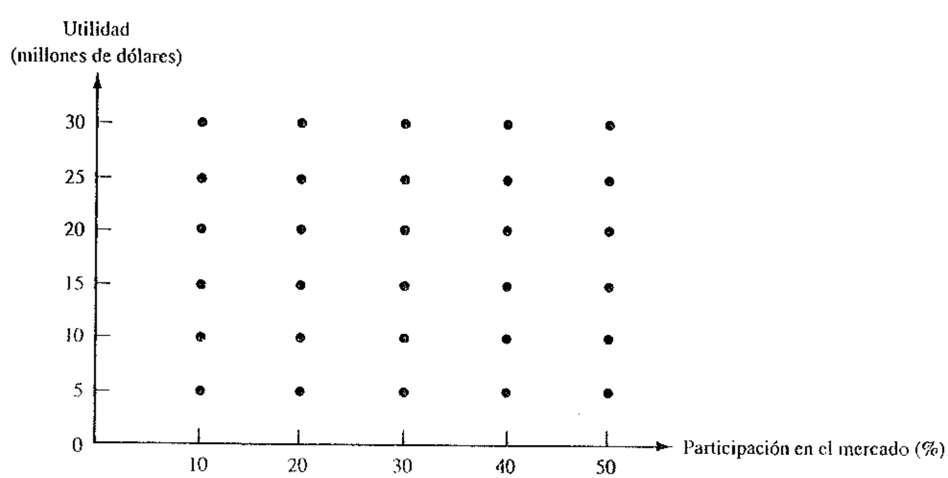
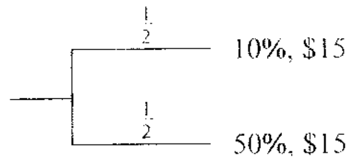
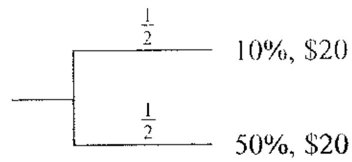


FIGURA 14
Niveles posibles de cada atributo para Fruit Computer Company

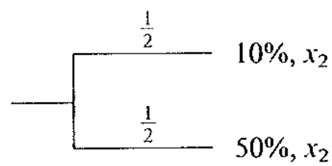
y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ en la mejor participación en el mercado (50%), con x_2 fija a algún nivel (por ejemplo x_2 = \$15 millones). Suponga que el equivalente de certidumbre de



es (30%, \$15). Para determinar si el atributo 1 es iu del atributo 2, se fija el atributo 2 en algún otro nivel (digamos, x_2 = \$20 millones) y se encuentra el equivalente de certidumbre de la siguiente lotería.

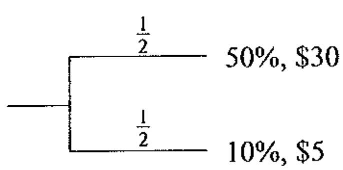


Si el atributo 1 es iu del atributo 2, el equivalente de certidumbre de esta lotería debe estar cerca de (30%, \$20). Para otros valores de x_2 (digamos, x_2 = \$5, \$10, \$25 y \$30), se comprueba si el equivalente de certidumbre de la lotería

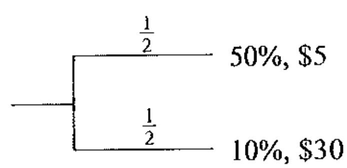


está cercano a (30%, x_2). Suponga que éste es el caso. Entonces se repite este procedimiento con otros valores de participación en el mercado que sustituyen a 10 y 50%. Si tienen resultados similares, entonces el atributo 1 es iu del atributo 2. De manera análoga, se puede determinar si el atributo 2 es iu del atributo 1. Si el atributo 1 es iu del atributo 2 y el atributo 2 es iu del atributo 1, los dos atributos son miu. Supóngase que los atributos 1 y 2 son (por lo menos aproximadamente) miu y proceda al paso 2 (comprobando la independencia aditiva).

Para comprobar la independencia aditiva, se debe determinar si Fruit es indiferente entre



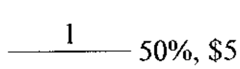
y



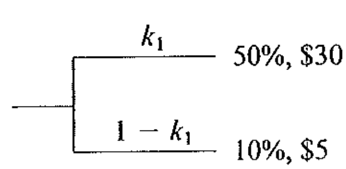
Suponga que Fruit no es indiferente entre estas loterías. Entonces la función de utilidad de Fruit no mostrará independencia aditiva. Se sabe que $u(x_1, x_2)$ se podría escribir como

$$u(x_1, x_2) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) + k_3 u_1(x_1) u_2(x_2)$$

Ahora se procede al paso 3 (evaluando $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$). Suponga que se obtienen los resultados mostrados en la figura 15. Para completar la evaluación de la función de utilidad multiatributos de Fruit, se debe determinar k_1, k_2 y k_3 (paso 4). Para encontrar k_1, se pide a Fruit determinar el número k_1 que hace a Fruit indiferente entre



y



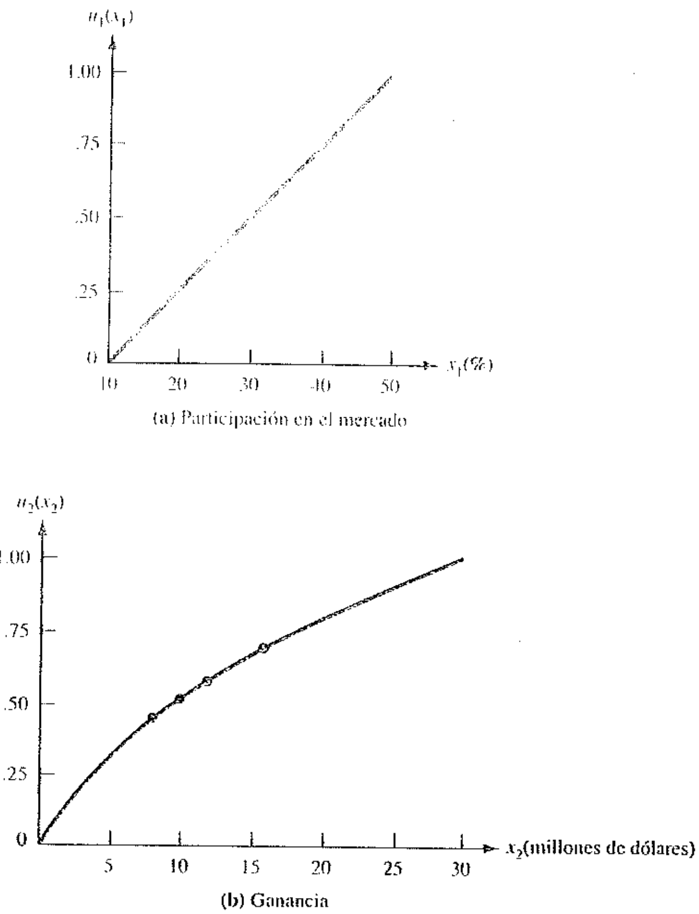


FIGURA 15
$u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$ para Fruit Computer

Suponga que para $k_1 = 0.6$, Fruit es indiferente entre estas dos loterías. De manera similar, k_2 es el número que hace a Fruit indiferente entre

1 — 10%, \$30 y k_2 — 50%, \$30; $1 - k_2$ — 10%, \$5

Suponga que para $k_2 = 0.5$, Fruit es indiferente entre estas dos loterías. Ahora $k_3 = 1 - k_1 - k_2 = -0.1$, y la función de utilidad multiatributos es

$$u(x_1, x_2) = 0.6u_1(x_1) + 0.5u_2(x_2) - 0.1u_1(x_1)u_2(x_2) \tag{13}$$

donde $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$ se grafican en la figura 15. Observe que

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.6u_1'(x_1) - 0.1u_1'(x_1)u_2(x_2)$$

Así, a medida que se incrementa la ganancia de Fruit, se ve que disminuye la utilidad obtenida de un punto adicional de participación en el mercado. De manera similar, si $k_3 > 0$, entonces cuando se incrementa la ganancia, se incrementaría el beneficio obtenido de un punto adicional de participación en el mercado. Como se describió en el paso 5, se debe comprobar ahora si esta función de utilidad multiatributos es consistente con las preferencias de Fruit.

Uso de funciones de utilidad multiatributos

Para ilustrar cómo se podría usar la función de utilidad multiatributos, suponga que Fruit debe determinar si monta una campaña de publicidad pequeña o grande durante el año venidero. Fruit cree que hay $\frac{1}{2}$ probabilidad de que su rival principal, CSL Computers, montará una pequeña campaña publicitaria en TV y $\frac{1}{2}$ probabilidad de que CSL montará una gran campaña publicitaria en televisión. Al final del año en curso, la participación en el mercado y las ganancias de Fruit (en millones de dólares) serán como se ilustra en la tabla 12. Fruit debe determinar cuál de las loterías siguientes tiene una utilidad esperada mayor: de la figura 15, se encuentra que $u_1(15) = 0.125$, $u_1(25) = 0.375$, $u_1(35) = 0.625$, $u_2(8) = 0.45$, $u_2(10) = 0.53$, $u_2(12) = 0.58$, y $u_2(16) = 0.70$. Entonces

$$\begin{aligned}
u(25\%, \$16) &= 0.6(.375) + 0.5(.7) - 0.1(.375)(.7) = .549\\
u(15\%, \$12) &= 0.6(.125) + 0.5(.58) - 0.1(.125)(.58) = .358\\
u(35\%, \$8) &= 0.6(.625) + 0.5(.45) - 0.1(.625)(.45) = .572\\
u(25\%, \$10) &= 0.6(.375) + 0.5(.53) - 0.1(.375)(.53) = .470
\end{aligned}$$

Entonces

$$E(U \text{ para la campaña publicitaria pequeña}) = (\tfrac{1}{2})(.549) + (\tfrac{1}{2})(.358) = .454$$
$$E(U \text{ para la campaña publicitaria grande}) = (\tfrac{1}{2})(.572) + (\tfrac{1}{2})(.470) = .521$$

Así, durante el año en curso, Fruit debe montar una gran campaña publicitaria.

TABLA 12
Efecto de la publicidad en la participación en el mercado y la ganancia

	Opciones de CSL	
Opciones de Fruit	Pequeña campaña publicitaria	Gran campaña publicitaria
Pequeña campaña publicitaria	25%, $16	15%, $12
Gran campaña publicitaria	35%, $8	25%, $10

PROBLEMAS

Grupo A

1 National Express Carriers está interesada en dos atributos:

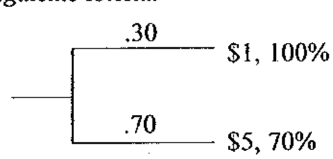
Atributo 1 El costo promedio de entregar una carta (que se sabe está entre $1 y $5)

Atributo 2 Porcentaje de las cartas que llegan a su destinatario a tiempo (que se sabe está entre 70 y 100%)

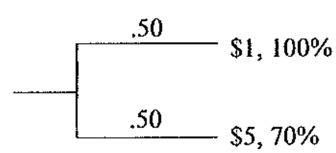
a ¿Podría la función de utilidad multiatributo de National mostrar miu?

b ¿Sería aditiva la función de utilidad de National?

c Suponga que los atributos 1 y 2 son miu. Suponga que National es indiferente entre ($1, 70%) con seguridad y la siguiente lotería:



Suponga también que National es indiferente entre ($5, 100%) con toda seguridad y



Encuentre la función de utilidad multiatributos de National. Exprese la función de utilidad multiatributos de National en términos de $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$.

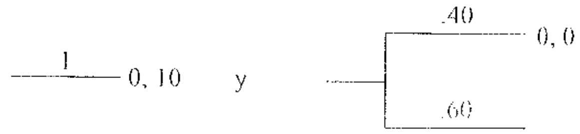
2 Keeney y Raiffa (1976) analizan la evaluación de una función de utilidad multiatributos del banco de sangre. Para simplificar, se supone que el banco de sangre debe determinar al comienzo de cada semana cuántas pintas de sangre se deben ordenar. Cualquier sobrante de sangre al final de la semana se echa a perder (caduca). Para el banco de sangre, dos atributos de interés son los siguientes:

Atributo 1 Número de pintas de sangre por las que la sangre pedida no cumple la demanda de la semana (el déficit semanal). Se sabe que el déficit semanal siempre está entre 0 y 10 pintas

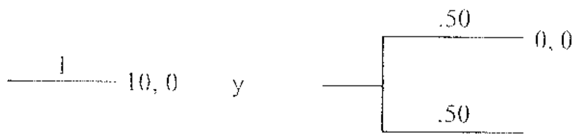
Atributo 2 Número de pintas de sangre que caducaron (se sabe que siempre son entre 0 y 10 pintas).

Suponga que los atributos 1 y 2 son miu.

a Suponga que el banco de sangre es indiferente entre



y entre



Sea x_1 el valor del atributo 1 y x_2 = valor del atributo 2. También suponga que

$$u_1(x_1) = .58 \exp\left(1 - \frac{x_1}{10}\right) - .58$$

y

$$u_2(x_2) = 1 - \frac{x_2^2}{100}$$

Determine la función de utilidad multiatributos del banco.

b Suponga que cada semana hay una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que la demanda de sangre sean 25 pintas y una probabilidad $\frac{1}{2}$ de que sean 35 pintas. ¿Se beneficiaría el banco si ordena 28 pintas, 30 pintas o 32 pintas?

3 Demuestre que es válido el método para determinar k_2 descrito en este texto.

4 Gotham City intenta determinar cuántas ambulancias debe tener y cómo proveerlas de personal. Cada ambulancia se podría dotar de paramédicos o especialistas en emergencias. Se considera que los paramédicos proveen mejor servicio y se les pagan salarios más altos. Las limitaciones de presupuesto forzaron a la ciudad a elegir entre las dos alternativas siguientes:

Alternativa 1 Cuatro ambulancias, dos provistas con especialistas en emergencias y dos con paramédicos

Alternativa 2 Tres ambulancias, todas con paramédicos

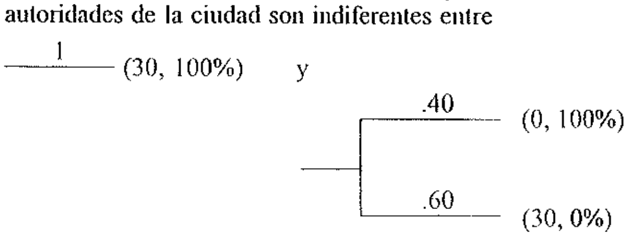
Las autoridades de la ciudad creen que los dos atributos siguientes cumplen con el servicio de ambulancias para la ciudad.

Atributo 1 Tiempo hasta que una ambulancia llega al paciente

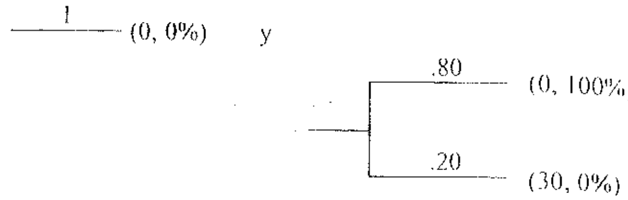
Atributo 2 Porcentaje de llamadas de ambulancia que manejan los paramédicos. Suponga que la función de utilidad multiatributos de Gotham City $u(x_1, x_2)$ es miu y que

$$u_1(x_1) = 1 - \frac{x_1^2}{900} \qquad \text{y} \qquad u_2(x_2) = \frac{x_2^2}{10\,000}$$

El tiempo para que una ambulancia llegue hasta donde se encuentra un paciente siempre está entre 0 y 30 minutos. Las autoridades de la ciudad son indiferentes entre



Las autoridades de la ciudad también son indiferentes entre



Suponga que si una ambulancia está disponible cuando entra una llamada, entonces la ambulancia llegará en 5 minutos; si no está disponible una ambulancia cuando entra una llamada, llegará en 20 minutos. Con tres ambulancias, una estará disponible de inmediato 60% de las veces, y con cuatro ambulancias, una estará disponible de inmediato 80% de las veces.

a Determine la función de utilidad multiatributos de las autoridades de la ciudad.

b ¿Qué alternativa deben elegir?

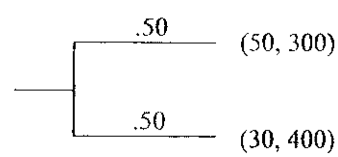
5 Public Service Indiana (PSI) está considerando dos sitios para una planta de energía nuclear. Los dos atributos siguientes influirán en su determinación acerca de dónde construir la planta:

Atributo 1 Costo de la planta (en millones de dólares)

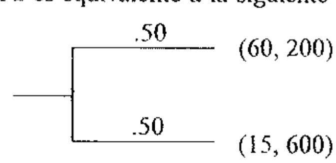
Atributo 2 Acres de tierra afectados por construir la planta

Suponga que la función de utilidad multiatributos de PSI está dada por $u_1(x_1, x_2) = .70u_1(x_1) + .20u_2(x_2) + .10u_1(x_1)u_2(x_2)$, donde $u_1(x_1) = .1 + \exp(-.1x_1)$ y $u_2(x_2) = 2.5 - 2.5 \exp(.0006x_2 - .48)$.

Dos lugares para la planta están en consideración. La ubicación 1 es equivalente a la siguiente lotería:



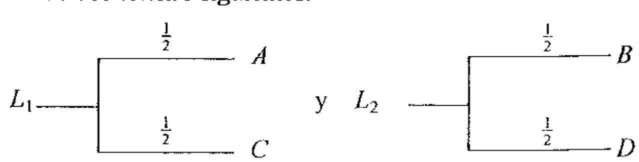
y la ubicación 2 es equivalente a la siguiente lotería:



¿Qué ubicación se debe elegir?

Grupo B

6 Considere los cuatro puntos A, B, C y D en la figura 16. Suponga que es deseable más de cada atributo y que la función de utilidad de quien toma la decisión es miu. Considere las dos loterías siguientes:



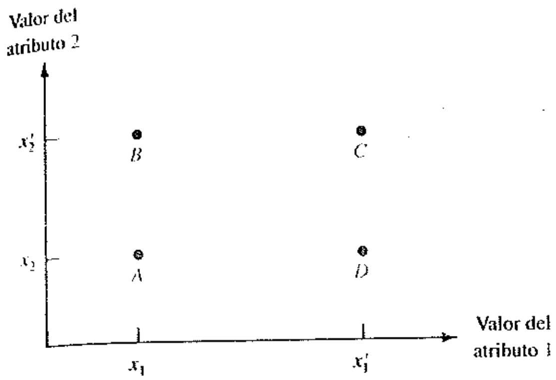
a Demuestre que si $k_3 > 0$, entonces $L_1 p L_2$.

b Demuestre que si $k_3 < 0$, entonces $L_2 p L_1$.

c Demuestre que si quien toma la decisión muestra independencia aditiva ($k_3 = 0$), entonces $L_1 i L_2$.

d Sea el atributo 1 = desempeño de Alemania en el frente oriental al final de la Segunda Guerra Mundial y el atributo 2 = desempeño de Alemania en el frente occi-

FIGURA 16



dental. Un alto nivel de un atributo significa que a Alemania le fue bien, y un bajo nivel de un atributo significa que a Alemania le fue mal. Suponga que Alemania sufre una derrota si se desempeña mal en cualquier frente. Si estos atributos son miu, ¿cuál sería el signo de k_3?

e General Motors tiene las divisiones nacional e internacional. Sea el atributo 1 = ganancias en la división nacional y atributo 2 = ganancias en la división internacional. Suponga que General Motors es razonablemente feliz si por lo menos una división tiene un buen año, pero es muy infeliz si ambas divisiones tienen un mal año. Si estos atributos son miu, ¿cuál sería el signo de k_3?

13.7 Proceso de jerarquía analítica

En la sección 13.6, se analizaron situaciones en las que quien toma la decisión elige entre alternativas basándose en cuán bien las alternativas satisfacen varios objetivos. Por ejemplo, para determinar qué oferta de trabajo aceptar, una persona que busca empleo (llámela Jane) podría elegir entre las ofertas determinando cuán bien cada una satisface los cuatro objetivos siguientes:

Objetivo 1 Alto salario inicial (SAL)

Objetivo 2 Calidad de vida en la ciudad donde se ubica el empleo (CV)

Objetivo 3 Interés en el trabajo (IT)

Objetivo 4 Ubicación del trabajo cerca de la familia y los parientes (CF)

Cuando varios objetivos son importantes para quien toma la decisión, podría ser difícil elegir entre alternativas. Por ejemplo, es posible que una oferta de trabajo ofrezca el salario inicial más alto, pero podría no cumplir del todo con los otros tres objetivos. Otra oferta de trabajo podría satisfacer los objetivos 2 a 4, pero tener un bajo salario inicial. En tal caso, es posible que a Jane se le dificulte elegir entre las ofertas de empleo. El **proceso de jerarquía analítica** de Thomas Saaty (PJA) proporciona una poderosa herramienta que se puede usar para tomar decisiones en casos con varios objetivos.

Para ilustrar cómo funciona el PJA, suponga que Jane tiene tres ofertas de trabajo y debe determinar qué oferta aceptar. Para el i-ésimo objetivo (en este ejemplo, $i = 1, 2, 3, 4$), el PJA genera (por un método que se describirá en breve) una ponderación w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) para el i-ésimo objetivo. Por conveniencia, la suma de las ponderaciones elegidas siempre es igual a 1. Suponga que para este ejemplo, se encontró que las ponderaciones de Joe son

$$w_1 = .5115, \quad w_2 = .0986, \quad w_3 = .2433, \quad w_4 = .1466$$

(La suma de estas ponderaciones no es igual a 1 debido al redondeo.) Las ponderaciones indican que un alto salario inicial es el objetivo más importante, seguido por el interés en el trabajo, cercanía a la familia y calidad de vida en la ciudad donde se ubica el trabajo.

A continuación suponga (de nuevo por un método que se describirá pronto) que Jane puede determinar cuán bien "califica" cada trabajo en cada objetivo. Por ejemplo, suponga que Jane determina que cada empleo califica en cada objetivo como se ilustra en la tabla 13. Por ejemplo, el trabajo 1 satisface mejor el objetivo de un salario inicial alto, pero "califica" peor en los otros objetivos.

Dadas las ponderaciones de Jane y la puntuación de cada empleo en cada objetivo, ¿cómo puede determinar que oferta de trabajo aceptar? Para la j-ésima oferta de trabajo ($j = 1$, 2, 3), calcule la puntuación global de la oferta de trabajo j como sigue:

$$\sum_{i=1}^{i=4} w_i \text{ (puntuación de la oferta de trabajo } j \text{ en relación con el objetivo } i)$$

TABLA 13

Puntuación de Jane para cada empleo y objetivo

Objetivo	Empleo 1	Empleo 2	Empleo 3
Salario	.571	.286	.143
Calidad de vida	.159	.252	.589
Interés en el trabajo	.088	.669	.243
Proximidad a la familia	.069	.426	.506

Ahora elija la oferta de trabajo con la puntuación global más alta. Observe que la puntuación global da más peso a la puntuación de la oferta de empleo en los objetivos más importantes. Calculando la puntuación global de cada empleo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Puntuación global del empleo 1} &= .5115(.571) + .0986(.159) + .2433(.088)\\
&\quad + .1466(.069) = .339\\
\text{Puntuación global del empleo 2} &= .5115(.286) + .0986(.252) + .2433(.669)\\
&\quad + .1466(.426) = .396\\
\text{Puntuación global del empleo 3} &= .5115(.143) + .0986(.589) + .2433(.243)\\
&\quad + .1466(.506) = .265
\end{aligned}$$

Así, el PJA indicaría que Jane debe aceptar el trabajo 2.

Obtención de ponderaciones para cada objetivo

Suponga que hay n objetivos. Se empieza por escribir una matriz $n \times n$ (conocida como **matriz de comparación por pares**) A. El elemento del renglón i y la columna j de A (llámelo a_{ij}) indica cuánto más importante es el objetivo i que el objetivo j. La "importancia" se medirá en una escala de valores enteros del 1 al 9, donde cada número tiene la interpretación mostrada en la tabla 14. Para toda i, es necesario que $a_{ii} = 1$. Si por ejemplo, $a_{13} = 3$, el objetivo 1 es débilmente más importante que el objetivo 3. Si $a_{ij} = k$, entonces por consistencia, es necesario que $a_{ji} = \frac{1}{k}$. Así, si $a_{13} = 3$, entonces se debe cumplir que $a_{31} = \frac{1}{3}$

Suponga que Jane ha identificado la siguiente matriz de comparación por pares para sus cuatro objetivos (SAL = salario alto; CV = calidad de vida alta; IT = interés en el trabajo; CF = cercanía a la familia):

$$\begin{array}{c} \\ \text{SAL} \\ \text{CV} \\ \text{IT} \\ \text{CF} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \text{SAL} & \text{CV} & \text{IT} & \text{CF} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Infortunadamente, algunas comparaciones por pares de Jane son inconsistentes. Para ilustrar el significado de consistencia, observe que como $a_{13} = 2$, ella siente que SAL es el doble de importante que IT. Puesto que $a_{32} = 2$, ella cree que IT tiene el doble de importancia que CV. La consistencia de las preferencias implicaría que Jane debe sentir que SAL es $2(2) = 4$ veces tan importante como CV. Sin embargo, puesto que $a_{12} = 5$, Jane cree que SAL es 5 veces tan importante como CV. Esto muestra que las comparaciones por pares de Jane exhiben una ligera inconsistencia. Las inconsistencias ligeras son comunes y no causan dificultades serias. Más adelante en esta sección se analiza un índice que se puede usar para medir la consistencia de las preferencias de Jane.

TABLA 14
Interpretación de los elementos en una matriz de comparación por pares

Valor de a_{ij}	Interpretación
1	El objetivo i y el j son de igual importancia.
3	El objetivo i es débilmente más importante que el objetivo j.
5	La experiencia y el juicio indican que el objetivo i es fuertemente más importante que el objetivo j.
7	El objetivo i es fuerte o demostrablemente más importante que el objetivo j.
9	El objetivo i es absolutamente más importante que el objetivo j.
2, 4, 6, 8	Los valores intermedios, por ejemplo, un valor de 8 significa que el objetivo i está a la mitad entre fuerte y absolutamente más importante que el objetivo j.

Suponga que hay n objetivos. Sea w_i = el peso dado al objetivo i. Para describir cómo el PJA determina las w_i, suponga que quien toma la decisión es perfectamente consistente. Entonces la matriz de comparación por pares debe ser de la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Por ejemplo, suponga que $w_1 = \frac{1}{2}$ y $w_2 = \frac{1}{6}$. Entonces el objetivo 1 es tres veces tan importante como el objetivo 2, así

$$a_{12} = \frac{w_1}{w_2} = 3$$

Ahora suponga que una persona consistente que toma decisiones tiene una matriz de comparación por pares A de la forma (13). ¿Cómo se puede recuperar el vector $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$ de A? Considere el sistema de n ecuaciones

$$A\mathbf{w}^T = \Delta\mathbf{w}^T \tag{14}$$

donde Δ es un número desconocido y $\mathbf{w}^T$ es un vector columna desconocido n-dimensional. Para cualquier número Δ, (14) siempre tiene la solución trivial $\mathbf{w} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$. Se puede demostrar que si A es la matriz de comparación por pares de una persona perfectamente consistente que toma decisiones (es decir, si A es de la forma (13)) y no se permite que $\Delta = 0$, entonces la única solución no trivial para (14) es $\Delta = n$ y $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$. Esto demuestra que para una persona consistente que toma decisiones, las ponderaciones w_i se pueden obtener de la única solución no trivial para (14). Ahora suponga que quien toma la decisión no es perfectamente consistente. Sea Δ_{max} el número más grande para el cual (14) tiene una solución no trivial (llame a esta solución $\mathbf{w}_{max}$). Si las comparaciones de quien toma la decisión no se desvían mucho de la consistencia perfecta, se esperaría que Δ_{max} estuviera cerca de n y $\mathbf{w}_{max}$ estuviera cerca de $\mathbf{w}$. Saaty verificó que esta idea intuitiva es en efecto correcta y sugirió aproximar $\mathbf{w}$ por medio de $\mathbf{w}_{max}$. Saaty también propuso medir la consistencia de quien toma la decisión observando cuán cerca de n está Δ_{max}. El paquete de software Expert Choice da (entre otros resultados) valores exactos de Δ_{max} y $\mathbf{w}_{max}$ y una medida. En lo que sigue, se describe un método sencillo (puesto en práctica fácilmente en cualquier hoja de cálculo) que se puede usar para aproximar Δ_{max} y $\mathbf{w}_{max}$ y un índice de consistencia.

Para aproximar $\mathbf{w}_{max}$, se usa el procedimiento de dos pasos siguiente:

Paso 1 Para cada una de las columnas de A, haga lo siguiente. Divida cada elemento de la columna i de A entre la suma de los elementos de la columna i. Esto produce una nueva matriz (llámela A_{norm}, para regularizar) en la cual la suma de los elementos de cada columna es 1. Para la matriz de comparación por pares de Jane, el paso 1 da como resultado

$$A_{\text{norm}} = \begin{bmatrix} .5128 & .5000 & .5000 & .5333 \\ .1026 & .1000 & .1250 & .0667 \\ .2564 & .2000 & .2500 & .2667 \\ .1282 & .2000 & .1250 & .1333 \end{bmatrix}$$

Paso 2 Para encontrar una aproximación a $\mathbf{w}_{max}$ (que se utilizará como estimación de $\mathbf{w}$), proceda como sigue: Estime w_i como el promedio de los elementos del renglón i de A_{norm}. Esto produce (como ya se mencionó)

$$w_1 = \frac{.5128 + .5000 + .5000 + .5333}{4} = .5115$$

$$w_2 = \frac{.1026 + .1000 + .1250 + .0667}{4} = .0986$$

$$w_3 = \frac{.2564 + .2000 + .2500 + .2667}{4} = .2433$$

$$w_4 = \frac{.1282 + .2000 + .1250 + .1333}{4} = .1466$$

De manera intuitiva, ¿por qué w_1 se aproxima al peso que se debe dar al objetivo 1 (salario)? El porcentaje del peso que se da a SAL en las comparaciones por pares de cada objetivo para SAL es .5128. De manera similar, .50 representa el porcentaje de ponderación total que SAL da en las comparaciones por pares de cada objetivo para CV. Así, se ve que cada uno de los cuatro números promediados para obtener w_1 representa de alguna manera una medida del peso total atribuido a SAL. Así, promediando estos números se debe obtener una buena estimación del porcentaje del peso total que se debe dar a SAL.

Comprobación de la consistencia

Ahora se puede usar el siguiente procedimiento de cuatro pasos para comprobar la consistencia de las comparaciones de quien toma la decisión. (De ahora en adelante, $\mathbf{w}$ denota la estimación de las ponderaciones de quien toma la decisión.)

Paso 1 Calcule $A\mathbf{w}^T$. Para el ejemplo, se obtiene

$$A\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5115 \\ .0986 \\ .2433 \\ .1466 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0775 \\ 0.3959 \\ 0.9894 \\ 0.5933 \end{bmatrix}$$

Paso 2 Calcule

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i\text{-ésimo elemento de } A\mathbf{w}^T}{i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{w}^T}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{2.0775}{.5115} + \frac{.3959}{.0986} + \frac{.9894}{.2433} + \frac{.5933}{.1466}\right\}$$

$$= 4.05$$

TABLA 15
Valores del índice aleatorio (IA)

IA	n
2	0
3	.58
4	.90
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45

Paso 3 Calcule el **índice de consistencia** (IC) como sigue:

$$\text{IC} = \frac{(\text{Resultado del paso 2}) - n}{n - 1} = \frac{4.05 - 4}{3} = .017$$

Paso 4 Compare el IC con el índice aleatorio IA para el valor apropiado de n, mostrado en la tabla 15.

Para una persona que toma una decisión y es perfectamente consistente (véase el problema 5), el i-ésimo elemento en $A\mathbf{w}^T = n$ (i-ésimo elemento de $\mathbf{w}^T$). Esto implica que una persona perfectamente consistente que toma una decisión tiene IC $= 0$. Los valores de IA de la tabla 15 dan el valor promedio de IC si los elementos de A se eligieron al azar, sujetos a la restricción de que los elementos de la diagonal deben ser igual a 1 y

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

Si el IC es suficientemente pequeño, es probable que las comparaciones de quien toma la decisión tengan la consistencia suficiente para dar estimaciones útiles de las ponderaciones para su función objetivo. Si $\frac{\text{IC}}{\text{IA}} < .10$, el grado de consistencia es satisfactorio, pero si $\frac{\text{IC}}{\text{IA}} > .10$, podría haber serias inconsistencias y es posible que el PJA no dé resultados importantes. En nuestro ejemplo, $\frac{\text{IC}}{\text{IA}} = \frac{.017}{.90} = .019 < .10$; así, la matriz de comparación por pares de Jane no muestra ninguna inconsistencia grave.

Cómo hallar la puntuación de una alternativa para un objetivo

Ya se describió cómo determinar las ponderaciones de la función objetivo que se utilizaron para ayudar a Jane a determinar cuál oferta de trabajo aceptar. Ahora se determina cuán bien cada empleo "satisface" o "califica" en cada objetivo. Para determinar estas puntuaciones, se construye para cada objetivo una matriz de comparación por pares en la que los renglones y columnas son las posibles decisiones de Jane (en este caso, ofertas de trabajo). Para SAL, suponga que se obtiene la siguiente matriz de comparación por pares:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \text{Empleo 1} & \text{Empleo 2} & \text{Empleo 3} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Empleo 1} \\ \text{Empleo 2} \\ \text{Empleo 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Así, por ejemplo, con respecto al salario, el empleo 1 es mejor (entre débil y fuertemente) que el empleo 3. Ahora se puede aplicar el procedimiento para generar las ponderaciones para la matriz de comparación por pares de SAL. Se obtiene

$$A_{\text{norm}} = \begin{bmatrix} .571 & .571 & .571 \\ .286 & .286 & .286 \\ .143 & .143 & .143 \end{bmatrix}$$

De aquí se obtiene $\mathbf{w} = [.571\ .286\ .143]$. Estas ponderaciones indican cuán bien "califica" cada empleo con respecto al objetivo SAL. Como se expresó antes en la tabla 13, se obtiene

$$\text{Puntuación del salario para el empleo } 1 = .571$$
$$\text{Puntuación del salario para el empleo } 2 = .286$$
$$\text{Puntuación del salario para el empleo } 3 = .143$$

Puesto que las tres columnas de la matriz de comparación por pares para el salario son idénticas, las comparaciones por pares de Jane para el salario exhiben consistencia perfecta.

Suponga que la matriz de comparación por pares de Jane para la calidad de vida (CV) es como sigue:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Empleo 1} \\ \text{Empleo 2} \\ \text{Empleo 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Empleo 1} & \text{Empleo 2} & \text{Empleo 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Entonces

$$A_{\text{norm}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{9} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

y obtenemos

$$\text{Puntuación de la calidad de vida para el empleo } 1 = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5}}{3} = .159$$

$$\text{Puntuación de la calidad de vida para el empleo } 2 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{5}}{3} = .252$$

$$\text{Puntuación de la calidad de vida para el empleo } 3 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{6}{9} + \frac{3}{5}}{3} = .589$$

Para el interés en el trabajo, suponga que la matriz de comparación por pares es como sigue:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Empleo 1} \\ \text{Empleo 2} \\ \text{Empleo 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Empleo 1} & \text{Empleo 2} & \text{Empleo 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se puede demostrar fácilmente que

$$\text{Puntuación de interés en el trabajo para el empleo } 1 = .088$$
$$\text{Puntuación de interés en el trabajo para el empleo } 2 = .669$$
$$\text{Puntuación de interés en el trabajo para el empleo } 3 = .243$$

Por último, para cercanía a la familia, suponga que la matriz de comparación por pares es como sigue:

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{Empleo 1} \\ \text{Empleo 2} \\ \text{Empleo 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Empleo} & \text{Empleo} & \text{Empleo} \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Con los cálculos de rutina, se obtiene

Puntuación del empleo 1 para cercanía a la familia = .069

Puntuación del empleo 2 para cercanía a la familia = .426

Puntuación del empleo 3 para cercanía a la familia = .506

Como se describió antes, ahora podemos "sintetizar" las ponderaciones objetivo con las puntuaciones de cada empleo en cada objetivo para obtener una puntuación global para cada alternativa (en este caso, cada oferta de trabajo). Como antes, se encuentra que la oferta de trabajo 2 es la que tiene más preferencia, seguida por la oferta de trabajo 1 y, por último, la oferta 3.

Se concluye con la observación de que quienes toman decisiones han aplicado en incontables áreas el PJA, como contabilidad, finanzas, comercialización, planificación de recursos energéticos, selección de microcomputadoras, sociología, arquitectura y ciencias políticas. Véase en Zahedi (1986) y Saaty (1988) un análisis de las aplicaciones del PJA.

Ejecución del PJA en una hoja de cálculo

AHP.xls

En la figura 17 se ilustra cuán fácil es poner en práctica el PJA en una hoja de cálculo (archivo AHP.xls). Introduzca la matriz de comparación por pares para la objetivos de B7:E10. En B12 introduzca la fórmula =B7/**SUM**(B\$7:B\$10) y cópiela para el intervalo B12:E15, con lo que se obtiene A_{norm} para los objetivos. Calcule la ponderación para el salario en F12 con la instrucción **AVERAGE**(B12:E12). Copie esto a F12:F15 para calcular las ponderaciones de los objetivos restantes. De manera similar, se obtienen las matrices normalizadas y las ponderaciones para cada objetivo.

Para determinar la puntuación del empleo 1, introduzca en F17 la fórmula

=F\$12 * F21 + F\$13 * F29 + F\$14 * F37 + F\$15 * F45

Copiando esta fórmula a F17:F19 se calcula la puntuación para los empleos 2 y 3. De nuevo, se ve que el empleo 2 recibe la puntuación más alta (indicada por ****).

A fin de calcular el índice de consistencia para la matriz de comparación por pares de los objetivos, se usa la función de multiplicación de matrices de Excel MMULT, calculando $A\text{w}^T$ en el intervalo C2:C5. En el intervalo D2:D5 calcule (i-ésimo elemento de $A\text{w}^T$)/(i-ésimo elemento de w^T). Por último, en E2 calcule el IC, por medio de la fórmula (**AVERAGE**(D2:D5) − 4)/3.

Es fácil multiplicar matrices por medio de la función MMULT de Excel. Para ilustrar, se usa Excel para encontrar el producto de matrices AB (véanse la figura 18 y el archivo Mmult.xls). Se procede como sigue:

Mmult.xls

Paso 1 Introduzca A y B en D2:F3 y D5:E7, respectivamente.

Paso 2 Seleccione el intervalo (D9:E10) en que se calculará el producto AB.

Paso 3 En la esquina superior izquierda (D9) del intervalo seleccionado, teclee la fórmula

= MMULT(D2:F3,D5:E7)

Luego, presione **CONTROL SHIFT ENTER** (no sólo ENTER) y se calculará el producto matricial deseado. Observe que MMULT es una función de arreglo, no una función ordinaria de hoja de cálculo. Esto explica por qué se debe preseleccionar el intervalo para AB y usar CONTROL SHIFT ENTER.

FIGURA 17

Hoja de cálculo del PJA

	A	B	C	D	E	F	G
1		CONSISTENCY	INDEX	AwT/wT	CI		
2	IMPLEMENTING		2.0774038	4.0610902	0.0158569		
3	AHP	AwT=	0.3958173	4.0160976			
4	ON		0.9894231	4.0671937			
5	A SPREADSHEET		0.5932692	4.0459016			
6	OBJECTIVES MATRIX	SAL	QL	IW	NF		
7	SAL	1	5	2	4		
8	QL	0.2	1	0.5	0.5		
9	IW	0.5	2	1	2		
10	NF	0.25	2	0.5	1		
11	ANORM(OBJECTIVES)	SAL	QL	NF	IW	WEIGHTS	
12	SAL	0.512820513	0.5	0.5	0.5333333	0.5115385	SAL
13	QL	0.102564103	0.1	0.125	0.0666667	0.0985577	QL
14	NF	0.256410256	0.2	0.25	0.2666667	0.2432692	IW
15	IW	0.128205128	0.2	0.125	0.1333333	0.1466346	NF
16	SALARY MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
17	JOB1	1	2	4	JOB1SC=	0.3395156	
18	JOB2	0.5	1	2	JOB2SC=	0.3960857	****
19	JOB3	0.25	0.5	1	JOB3SC=	0.2643988	
20	ANORM(SALARY)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
21	JOB1	0.571428571	0.5714286	0.5714286		0.5714286	JOB1
22	JOB2	0.285714286	0.2857143	0.2857143		0.2857143	JOB2
23	JOB3	0.142857143	0.1428571	0.1428571		0.1428571	JOB3
24	QL MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
25	JOB1	1	0.5	0.3333333			
26	JOB2	2	1	0.3333333			
27	JOB3	3	3	1			
28	ANORM(QL)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
29	JOB1	0.166666667	0.1111111	0.2		0.1592593	JOB1
30	JOB2	0.333333333	0.2222222	0.2		0.2518519	JOB2
31	JOB3	0.5	0.6666667	0.6		0.5888889	JOB3
32	IW MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
33	JOB1	1	0.1428571	0.3333333			
34	JOB2	7	1	3			
35	JOB3	3	0.3333333	1			
36	ANORM(IW)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
37	JOB1	0.090909091	0.0967742	0.0769231		0.0882021	JOB1
38	JOB2	0.636363636	0.6774194	0.6923077		0.6686969	JOB2
39	JOB3	0.272727273	0.2258065	0.2307692		0.243101	JOB3
40	NF MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
41	JOB1	1	0.25	0.1428571			
42	JOB2	4	1	2			
43	JOB3	7	2	1			
44	ANORM(NF)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
45	JOB1	0.083333333	0.0769231	0.0454545		0.0685703	JOB1
46	JOB2	0.333333333	0.3076923	0.6363636		0.4257964	JOB2
47	JOB3	0.583333333	0.6153846	0.3181818		0.5056333	JOB3

	A	B	C	D	E	F
1	MatrixMultiplication					
2				1	1	2
3			A	2	1	3
4						
5			B	1	1	
6				2	3	
7				1	2	
8						
9				5	8	
10			C	7	11	
11						

FIGURA 18

PROBLEMAS

Grupo A

1 El incremento salarial anual de cada profesor se determina mediante el desempeño en tres áreas: docencia, investigación y servicio a la universidad. La administración presentó la siguiente matriz de comparación por pares para estos objetivos:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc}\text{Docencia} & \text{Investigación} & \text{Servicio}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Docencia}\\ \text{Investigación}\\ \text{Servicio}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 5\\ 3 & 1 & 7\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

La administración comparó dos profesores con respecto a su docencia, investigación y servicio durante el año pasado. Las matrices de comparación por pares son como sigue. Para docencia:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Profesor 1} & \text{Profesor 2}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Profesor 1}\\ \text{Profesor 2}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 4\\ \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Para investigación:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Profesor 1} & \text{Profesor 2}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Profesor 1}\\ \text{Profesor 2}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 3 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Para servicio a la Universidad:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Profesor 1} & \text{Profesor 2}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Profesor 1}\\ \text{Profesor 2}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 6\\ \frac{1}{6} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

a ¿Qué profesor debe recibir el aumento más grande?

b ¿El PJA indica cuán grande debe ser el aumento que se debe dar a cada profesor?

c Compruebe la consistencia de la matriz de comparación por pares.

2 Un negocio está a punto de comprar una nueva computadora personal. Tres son los objetivos importantes para determinar qué computadora se debe comprar: costo, facilidad de uso y disponibilidad de software. La matriz de comparación por pares para estos objetivos es la siguiente:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc}\text{Costo} & \text{Facilidad de uso} & \text{Disponibilidad de software}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Costo}\\ \text{Facilidad de uso}\\ \text{Disponibilidad de software}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ 4 & 1 & \frac{1}{2}\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Tres computadoras están siendo consideradas para la compra. El desempeño de cada computadora con respecto a cada objetivo se indica con las siguientes matrices de comparación por pares. Para costo (el costo bajo es bueno, ¡el costo alto es malo!):

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc}\text{Computadora 1} & \text{Computadora 2} & \text{Computadora 3}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Computadora 1}\\ \text{Computadora 2}\\ \text{Computadora 3}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ \frac{1}{3} & 1 & 2\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Para facilidad de uso:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc}\text{Computadora 1} & \text{Computadora 2} & \text{Computadora 3}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Computadora 1}\\ \text{Computadora 2}\\ \text{Computadora 3}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 3 & 1 & 5\\ 2 & \frac{1}{5} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Para disponibilidad de software:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc}\text{Computadora 1} & \text{Computadora 2} & \text{Computadora 3}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Computadora 1}\\ \text{Computadora 2}\\ \text{Computadora 3}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7}\\ 3 & 1 & \frac{1}{5}\\ 7 & 5 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

a ¿Cuál computadora se debe comprar?

b Compruebe la consistencia de las matrices de comparación por pares.

3 Woody está listo para elegir su pareja de por vida y ha determinado que belleza, inteligencia y personalidad son los factores clave para elegir una pareja satisfactoria. Su matriz de comparación por pares para estos objetivos es la siguiente:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccc}\text{Belleza} & \text{Inteligencia} & \text{Personalidad}\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{Belleza}\\ \text{Inteligencia}\\ \text{Personalidad}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ \frac{1}{3} & 1 & 3\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Tres mujeres (Jennifer López, Britney Spears y Mandy Moore) están rogando ser la compañera de Woody. Los puntos de vista de estas mujeres en relación con la belleza, inteligencia y personalidad se dan en las siguientes matrices de comparación por pares.

Belleza:

	Jennifer	Britney	Mandy
Jennifer	1	5	3
Britney	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$
Mandy	$\frac{1}{3}$	2	1

Inteligencia:

	Jennifer	Britney	Mandy
Jennifer	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
Britney	6	1	2
Mandy	4	$\frac{1}{2}$	1

Personalidad:

	Jennifer	Britney	Mandy
Jennifer	1	4	$\frac{1}{4}$
Britney	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{9}$
Mandy	4	9	1

a ¿A quién debe elegir Woody como su compañera de por vida?

b Evalúe la consistencia de las matrices de comparación por pares

4 Para determinar dónde invertir mi dinero, se consideran igualmente importantes dos objetivos: tasa esperada de retorno y grado de riesgo. Dos inversiones (1 y 2) tienen las siguientes matrices de comparación por pares: rendimiento esperado:

	Inversión 1	Inversión 2
Inversión 1	1	$\frac{1}{2}$
Inversión 2	2	1

Grado de riesgo:

	Inversión 1	Inversión 2
Inversión 1	1	3
Inversión 2	$\frac{1}{3}$	1

a ¿Cómo debo clasificar estas inversiones?

b Ahora suponga que está disponible otra inversión (inversión 3). Suponga que las matrices de comparaciones por pares para estas inversiones son las siguientes. Rendimiento esperado:

	Inversión 1	Inversión 2	Inversión 3
Inversión 1	1	$\frac{1}{2}$	4
Inversión 2	2	1	8
Inversión 3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

Grado de riesgo:

	Inversión 1	Inversión 2	Inversión 3
Inversión 1	1	3	$\frac{1}{2}$
Inversión 2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{6}$
Inversión 3	2	6	1

c Observe que no cambiaron los elementos de las matrices de comparación para las inversiones 1 y 2. ¿Cómo debo clasificar ahora estas inversiones? Contraste la clasificación de las inversiones 1 y 2 con la respuesta del inciso (a).

5 Demuestre que para una persona perfectamente consistente que toma decisiones, el i-ésimo elemento de $Aw^T = n$ (i-ésimo elemento de $\mathbf{w}^T$).

6 Un consumidor está intentando determinar qué tipo de comida congelada comer. Él considera importantes tres atributos: sabor, valor nutricional y precio. Se considera que el valor nutricional está determinado por las concentraciones de colesterol y sodio. La matriz de comparación por pares para los tres atributos es como sigue:

	Sabor	Valor nutricional	Precio
Sabor	1	3	$\frac{1}{2}$
Valor nutricional	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{5}$
Precio	2	5	1

Entre las tres comidas congeladas la matriz de comparación por pares para cada atributo es como sigue. Para el sabor:

	Comida 1	Comida 2	Comida 3
Sabor 1	1	5	3
Sabor 2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$
Sabor 3	$\frac{1}{3}$	2	1

Para el sodio:

	Comida 1	Comida 2	Comida 3
Sodio 1	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$
Sodio 2	7	1	2
Sodio 3	3	$\frac{1}{2}$	1

Para el colesterol:

	Comida 1	Comida 2	Comida 3
Colesterol 1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
Colesterol 2	8	1	2
Colesterol 3	4	$\frac{1}{2}$	1

Para el precio:

	Comida 1	Comida 2	Comida 3
Precio 1	1	4	$\frac{1}{2}$
Precio 2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{6}$
Precio 3	2	6	1

Para determinar cómo califica cada comida respecto a la nutrición, será necesario evaluar la siguiente matriz de comparación por pares para el colesterol y el sodio:

	Colesterol	Sodio
Colesterol	1	5
Sodio	$\frac{1}{5}$	1

¿Qué comida congelada preferiría el consumidor? (*Sugerencia*: puntuación para una comida respecto a la nutrición = (puntuación de la comida en relación con el sodio) * (ponderación para el sodio) + (puntuación para la comida en relación con el colesterol) * (ponderación para el colesterol).)

7 Se está tratando de determinar a qué programa de la MBA asistir. Usted ha sido aceptado en dos programas: Indiana y Northwestern. Usted eligió usar tres atributos como ayuda para tomar su decisión:

Atributo 1 Costo

Atributo 1 Salario inicial

Atributo 1 Ambiente escolar (¿podemos hacer fiesta allí?)

Su matriz de comparación por pares para estos atributos es como sigue:

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{Costo} \\
\text{Salario inicial} \\
\text{Ambiente}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Costo} & \text{Salario inicial} & \text{Ambiente} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Para cada atributo de la matriz de comparación por pares para Indiana y Northwestern es como sigue: Para el costo:

$$
\begin{array}{l} \\ \text{Indiana} \\ \text{Northwestern} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \text{Indiana} & \text{Northwestern} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Para el salario inicial:

$$
\begin{array}{l} \\ \text{Indiana} \\ \text{Northwestern} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \text{Indiana} & \text{Northwestern} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Para el ambiente:

$$
\begin{array}{l} \\ \text{Indiana} \\ \text{Northwestern} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \text{Indiana} & \text{Northwestern} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

¿A qué programa de la MBA debe asistir?

8 Usted ha sido contratado por Arthur Ross para determinar cuál de los siguientes procedimientos de cuentas por cobrar se debe usar en una auditoría de Keating Five and Dime Store:

a Revisión analítica

b Confirmaciones

c Prueba de colecciones posteriores (recibos)

Los tres criterios utilizados para distinguir entre los procedimientos son los siguientes:

a Confiabilidad

b Costo

c Validez

La matriz de comparación por pares para los tres criterios es la siguiente:

$$
\begin{array}{l} \text{Confiabilidad} \\ \text{Costo} \\ \text{Validez} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
$$

Para el criterio de confiabilidad la matriz de comparación por pares de los tres procedimientos es como sigue:

$$
\begin{array}{l} \text{Revisión analítica} \\ \text{Confirmaciones} \\ \text{Prueba de colecciones posteriores} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}
$$

Para el criterio de costo la matriz de comparación por pares de los tres procedimientos es la siguiente:

$$
\begin{array}{l} \text{Revisión analítica} \\ \text{Confirmaciones} \\ \text{Prueba de colecciones posteriores} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

Para el criterio de validez la matriz de comparación por pares de los tres procedimientos es la siguiente:

$$
\begin{array}{l} \text{Revisión analítica} \\ \text{Confirmaciones} \\ \text{Prueba de colecciones posteriores} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

Utilice el PJA para determinar qué procedimiento de auditoría se debe usar. También compruebe la consistencia de la primera matriz de comparación por pares.[†]

9 Usted está tratando de determinar cuál de dos candidatos para el puesto de oficinista contratar (Jack y Jill). Los tres objetivos que son importantes para que usted decida son personalidad, capacidad para mecanografiar e inteligencia. Usted evaluó la siguiente matriz de comparación por pares:

$$
\begin{array}{l} \\ \text{Personalidad} \\ \text{Capacidad para mecanografiar} \\ \text{Inteligencia} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Personalidad} & \text{Capacidad para mecanografiar} & \text{Inteligencia} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

La "puntuación" de cada empleado en cada objetivo es como sigue:

$$
\begin{array}{l} \\ \text{Jack} \\ \text{Jill} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Personalidad} & \text{Capacidad para mecanografiar} & \text{Inteligencia} \end{array} \\
\begin{bmatrix} .4 & .6 & .2 \\ .6 & .4 & .8 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

¿Si usted sigue el método PJA qué empleado debe contratar?

[†]Basado en Lin, Mock y Wright (1984).

RESUMEN Criterios de decisión

En el **modelo de estado del mundo,** quien toma la decisión elige primero una acción a_i de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de acciones disponibles. Con probabilidad p_j se observa que el estado del mundo es $s_j \in S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Si se elige la acción a_i y el estado del mundo es s_j, quien toma la decisión recibe una recompensa r_{ij}.

El **criterio maximin** elige la acción a_i con el valor más grande de $\min_{j \in S} r_{ij}$. El **criterio maximax** selecciona la acción a_i con el valor mas grande de $\max_{j \in S} r_{ij}$. En cada estado, el **criterio de arrepentimiento minimax** elige una acción al aplicar el criterio minimax a la matriz de arrepentimiento. El **criterio del valor esperado** elige la decisión que produce la recompensa esperada más grande.

Teoría de la Utilidad

Una persona que toma decisiones y acepta los axiomas de Von Neumann-Morgenstern, cuando enfrenta una elección entre varias loterías, debe elegir la lotería con la utilidad esperada más grande.

El **equivalente de certidumbre** de una lotería L, escrito como $EC(L)$, es el número $EC(L)$ tal que quien toma la decisión es indiferente entre la lotería L y recibir un cierto pago de $EC(L)$. Para una determinada lotería L, el **premio de riesgo**, escrito como $PR(L)$, está dado por $PR(L) = VE(L) - EC(L)$.

Una persona que toma decisiones es **adversa al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) > 0$. Una persona que toma decisiones y es adversa al riesgo, tiene una función de utilidad estrictamente cóncava. Una persona que toma decisiones es **neutra al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) = 0$. Una persona que toma decisiones y es neutra al riesgo, tiene una función de utilidad lineal. Una persona que toma decisiones es **favorable al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $RP(L) < 0$. Una persona que toma decisiones y es favorable al riesgo tiene una función de utilidad convexa.

Teoría del prospecto y encuadre

Tversky y Kahneman resolvieron varios defectos en la MEU al desarrollar la teoría del prospecto y encuadre. En la teoría del prospecto se supone que no se trata con probabilidades como se dan en un problema de toma de decisiones. En vez de eso, quien toma la decisión trata una probabilidad p para un suceso como probabilidad "distorsionada" $\Pi(p)$. La idea del encuadre se basa en el hecho de que las personas a menudo establecen su función de utilidad desde el punto de vista de un marco o *status quo* desde el cual ven la situación actual.

Árboles de decisión

Para determinar las decisiones óptimas en un árbol de decisión, se trabaja hacia atrás (doblando el árbol hacia atrás) de derecha a izquierda. Suponga primero que quien toma la decisión es neutral al riesgo y quiere maximizar el estado final de los activos. En cada bifurcación de suceso, se calcula el estado final esperado de los activos y se introduce en ○. En cada bifurcación de decisión, se denota con ‖ la decisión que maximiza el estado final esperado de los activos y se introduce el estado final esperado de los activos asociado con esa decisión en □. Se continúa trabajando hacia atrás de este modo hasta llegar al comienzo del árbol. Entonces la secuencia óptima de decisiones se puede obtener siguiendo el símbolo ‖.

Para incorporar la función de utilidad de quien toma la decisión en un análisis de árbol de decisión, simplemente sustituya cada estado final de los activos x_0 por su utilidad $u(x_0)$. Luego, en cada bifurcación de suceso calcule la utilidad esperada, y en cada bifurcación de decisión, elija la rama que tiene la utilidad esperada más grande.

El **valor esperado de la información muestral** (VEIM) mide el valor asociado con la información de la prueba o la muestra: VEIM = VECIM − VECIO. El **valor esperado con la información perfecta** (VECIP) se encuentra dibujando un árbol de decisión en el que quien toma la decisión tiene información perfecta acerca de cuál estado ha ocurrido antes de tomar la decisión. Entonces el **valor esperado de la información perfecta** (VEIP) está dado por VEIP = VECIP − VECIO.

Regla de Bayes y árboles de decisión

Utilizamos la regla de Bayes en el análisis de árboles de decisión cuando se tienen las probabilidades a priori y (para cada estado del mundo) la probabilidad de que ocurrirá un resultado experimental. La regla de Bayes se utiliza entonces para calcular la probabilidad de que ocurrirá cada resultado experimental y (para cada resultado experimental) la probabilidad a posteriori de cada estado del mundo. Entonces el análisis del árbol de decisión procede como ya se describió.

Toma de decisiones con objetivos múltiples

El atributo 1 es **preferencialmente independiente** (pi) del atributo 2 si las preferencias para los valores del atributo 1 no dependen del valor del atributo 2.

Un conjunto de atributos S es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) de un conjunto de atributos S' si (1) los valores de los atributos en S' no afectan las preferencias para los valores de los atributos en S; (2) los valores de los atributos en S no afectan las preferencias para los valores de los atributos en S'.

Un conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es mutua y preferencialmente independiente (mpi) si para todos los subconjuntos S de $\{1, 2, \ldots, n\}$, S es mpi de $\bar{S}$. ($\bar{S}$ consiste en todos los miembros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no están incluidos en S.)

TEOREMA 1

Si el conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es mpi, las preferencias de quien toma la decisión se pueden representar por una función de valor (o costo) aditiva.

Funciones de utilidad multiatributos

El atributo 1 es **independiente de la utilidad** (iu) del atributo 2 si las preferencias para las loterías que tienen que ver con diferentes niveles del atributo 1 no dependen del nivel del atributo 2.

Si el atributo 1 es iu del atributo 2 y el atributo 2 es iu del atributo 1, entonces los atributos 1 y 2 son **mutuamente independientes de la utilidad** (miu).

TEOREMA 2

Los atributos 1 y 2 son miu si y sólo si la función de utilidad de quien toma la decisión $u(x_1, x_2)$ es una función multilineal de la forma

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_1(x_1)u_2(x_2) \tag{10}$$

Una función de utilidad de una persona que toma decisiones muestra **independencia aditiva** si quien toma la decisión es indiferente entre

$\frac{1}{2}$ — x_1(mejor), x_2(mejor)
$\frac{1}{2}$ — x_1(peor), x_2(peor)

y

$\frac{1}{2}$ — x_1(mejor), x_2(peor)
$\frac{1}{2}$ — x_1(peor), x_2(mejor)

Si los atributos 1 y 2 son mpi y la función de utilidad de quien toma la decisión muestra independencia aditiva, la función de utilidad de quien toma la decisión es de la forma aditiva siguiente:

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2)$$

El procedimiento siguiente se usa para evaluar funciones de utilidad multiatributos:

Paso 1 Comprobar si los atributos 1 y 2 son miu. Si es así, vaya al paso 2. Si los atributos no son miu, la evaluación de la función de utilidad multiatributos está fuera del alcance del análisis de este libro.

Paso 2 Compruebe si hay independencia aditiva.

Paso 3 Evalúe $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$.

Paso 4 Determine k_1, k_2 y (si no hay independencia aditiva) k_3.

Paso 5 Compruebe si la función de utilidad evaluada es consistente en realidad con las preferencias de quien toma la decisión. Para hacer esto, prepare varias loterías y utilice la utilidad esperada de cada lotería para clasificarlas de la más a la menos favorable. Si la función de utilidad esperada es consistente con las preferencias de quien toma la decisión, la clasificación de las loterías obtenida de la función de utilidad evaluada debe parecerse mucho a la clasificación de las loterías de quien toma la decisión.

Proceso de jerarquía analítica (PJA)

El PJA se utiliza a menudo para tomar decisiones en situaciones donde hay múltiples objetivos. Dada una matriz de comparación por pares A, se pueden aproximar las ponderaciones para cada atributo como sigue:

Paso 1 Para cada una de las columnas de A, haga lo siguiente. Divida cada elemento de la columna i de A entre la suma de los elementos de la columna i. Esto produce una nueva matriz (A_{norm}), en la cual la suma de los elementos de cada columna es 1.

Paso 2 Para hallar una aproximación a $\mathbf{w}_{\max}$, que se usará como estimación de $\mathbf{w}$, proceda como sigue. Estime w_i como el promedio de los elementos del renglón i de A_{norm}. Para hallar la mejor decisión, determine la puntuación global para una decisión como sigue:

$$\text{Puntuación de la decisión} = \sum_i w_i \,(\text{puntuación de la decisión en el objetivo } i)$$

Ahora elija la decisión con la puntuación más grande.

Para probar la consistencia de las matrices de comparación por pares, se usa el siguiente procedimiento de cuatro pasos. ($\mathbf{w}$ denota la estimación de las ponderaciones de quien toma la decisión.)

Paso 1 Calcule $A\mathbf{w}^T$.

Paso 2 Calcule

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{i\text{-ésimo elemento de } A\mathbf{w}^T}{i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{w}^T}$$

Paso 3 Calcule el **índice de consistencia** (IC) como sigue:

$$\text{IC} = \frac{(\text{Resultado del paso 2}) - n}{n - 1}$$

Paso 4 Compara IC con el índice aleatorio (IA) para el valor apropiado de n. Si $\frac{\text{IC}}{\text{IA}} < .10$, el grado de consistencia es satisfactorio, pero si $\frac{\text{IC}}{\text{IA}} > .10$, puede haber graves inconsistencias, y es posible que el PJA no dé resultados significativos.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Se tienen 1000 dólares para invertir. Todo el dinero debe ser colocado en una de tres inversiones: oro, acciones o certificados del mercado de valores. Si se colocan 1000 dólares en una inversión, el valor de ésta a un año depende del estado de la economía (véase la tabla 16). Suponga que cada estado de la economía tiene las mismas probabilidades. Para cada uno de los siguientes criterios de decisión, determine la decisión óptima:

a maximin

b maximax

TABLA 16

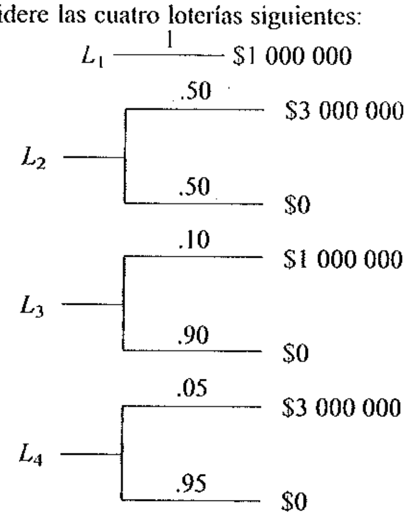
Valor de $1 000	Estado 1	Estado 2	Estado 3
Mercado de valores			
Certificado	$1100	$1100	$1100
Acciones	$1000	$1100	$1200
Oro	$1600	$300	$1400

c arrepentimiento minimax

d valor esperado

2 En el problema 1, suponga que la función de utilidad para el valor de la inversión (x) a un año está dado por $u(x) = \ln x$. Determine qué inversión se debe elegir. ¿Se podría haber anticipado esta respuesta sin una tabla de logaritmos?

3 Considere las cuatro loterías siguientes:



a La mayoría de las personas prefieren L_1 a L_2 y L_4 a L_3. Explique por qué.

b Suponga que una persona que toma decisiones acepta los axiomas de Von Neumann-Morgenstern y prefiere L_1 a L_2. Demuestre que la persona también debe preferir L_3 a L_4.

4 Lark Dent demandó a Jay Boyville Corporation. Lark puede evitar ir a la corte y ganar 40 000 dólares, o bien ir a la corte. Si Lark va a la corte, hay 30% de probabilidades de que gane el caso. Si ella gana, tienen la misma probabilidad una liquidación pequeña y una grande (una liquidación pequeña serían 50 000 dólares y una liquidación grande serían $300 000).

a Si Lark es neutral al riesgo, ¿qué debe hacer? ¿Qué debe hacer Lark si su función de utilidad para un incremento x de su estado de efectivo está dada po $u(x) = x^{1/2}$?

b Por 10 000 dólares, Lark puede contratar un asesor quien anticipará quién será el ganador del juicio. El asesor tiene la razón 90% de las veces. ¿Ella debe contratar al asesor? (Suponga que Lark es neutral al riesgo.) ¿Cuál es el VEIM?

c Si Lark es neutral al riesgo, ¿cuál es el VEIP?

5 Rollo Megabux tiene 1 millón de dólares para invertir en acciones o bonos. El rendimiento porcentual en cada inversión durante el año próximo depende de si la economía tiene un buen o mal año (véase la tabla 17). Las probabilidades de que la economía tenga un buen o un mal año son iguales.

TABLA 17

	La economía tiene un buen año	La economía tiene un mal año
Rendimiento de las acciones	22%	10%
Rendimiento de los bonos	16%	14%

a Si Rollo es neutral al riesgo, ¿cómo debe invertir su dinero?

b Por 10 000 dólares, Rollo puede contratar una consultoría para predecir el estado de la economía. Las predicciones de la consultoría tienen las siguientes propiedades:

P(buena predicción|buena economía) = .80

P(buena predicción|mala economía) = .20

¿Debe Rollo contratar a la consultoría? ¿Cuáles son VEIM y VEIP?

6 Willy Mutton tiene tres posibles robos de banco en su lista. Su probabilidad de éxito y el monto del robo se dan en la tabla 18. Estos robos se deben intentar en orden; si "pasa" un robo puede continuar al siguiente. Si Willie es capturado, pierde todo su dinero. ¿Qué estrategia maximiza su "ganancia" esperada?

7 Sean

x_1 = calificación promedio (CP) de un estudiante de licenciatura que intenta ingresar al programa MBA de la universidad estatal.

x_2 = puntuación del mismo estudiante en el GMAT.

Suponga que la preferencia entre aspirantes se basa en la siguiente función de valor:

$$v(x_1, x_2) = 200x_1 + x_2 - 0.1x_2(x_1)^2$$

a ¿El programa MBA preferiría un estudiante con CP de 3.8 y una puntuación GMAT de 500 a un estudiante con CP de 3.0 y una puntuación GMAT de 710?

b ¿Esta función de valor muestra independencia preferencial mutua?

8 El consejo de educación de Pine Valley está intentando determinar su función de utilidad multiatributos con respecto a los siguientes atributos:

Atributo 1 Puntuación promedio de los estudiantes en un examen de rendimiento en inglés

Atributo 2 Puntuación promedio de los estudiantes en un examen de rendimiento en matemáticas

TABLA 18

Robo	Probabilidad de éxito	Monto del robo (en millones de dólares)
1	.60	7
2	.80	6
3	.70	5

El consejo cree que ambos atributos varían entre 70 y 90% de respuestas correctas. El consejo es indiferente entre

$\frac{1}{2}$ — 90%, 90%
$\frac{1}{2}$ — 70%, 0%

y

$\frac{1}{2}$ — 90%, 70%
$\frac{1}{2}$ — 70%, 90%

Para cualquier nivel x_2 del atributo 2, el consejo también es indiferente entre

$\frac{1}{2}$ — 90%, x_2
$\frac{1}{2}$ — 70%, x_2

y

1 — 78%, x_2

Para cualquier nivel x_1 del atributo 1, el consejo es indiferente entre

.65 — x_1, 90%
.35 — x_1, 70%

y

1 — x_1, 76%

El consejo también es indiferente entre

1 — 90%, 70%

y

.40 — 90%, 90%
.60 — 70%, 70%

Por último, el consejo es indiferente entre

1 — 70%, 90%

y

.60 — 90%, 90%
.40 — 70%, 70%

El consejo debe decidir cuál de las dos técnicas de instrucción se debe usar en las escuelas de Pine Valley. La técnica 1 es equivalente a la siguiente lotería:

$\frac{1}{2}$ — 78%, 76%
$\frac{1}{2}$ — 70%, 90%

La técnica 2 es equivalente a la siguiente lotería:

.60 — 90%, 90%
.40 — 70%, 70%

¿El consejo preferiría la técnica 1 o la 2?

9 BeatTrop Foods está intentando elegir una de tres compañías para asociarse. Para tomar esta decisión hay siete factores importantes:

Factor 1 Contribución a la rentabilidad
Factor 2 Posible desarrollo
Factor 3 Ambiente de trabajo
Factor 4 Capacidad de investigación y desarrollo de la compañía
Factor 5 Ajuste organizativo
Factor 6 Tamaño relativo
Factor 7 Concordancia con la industria

La matriz de comparación por pares para estos factores es como sigue:

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 9 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 1 & 7 & 1 & \frac{1}{4} & 7 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 2 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 & 4 & 3 & \frac{1}{3} & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los tres contendientes para formar la sociedad tienen las siguientes matrices de comparación por pares para cada factor:

Factor 1

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factor 2

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factor 3

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factor 4

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factor 5

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} \\ 9 & \frac{1}{2} & 4 \\ 5 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factor 6

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factor 7

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Utilice el PJA para determinar la compañía con la cual preferiría asociarse BeatTrop.

10 Usted está intentando determinar en qué ciudad vivir. Nueva York y Chicago están en consideración. Cuatro objetivos determinarán su decisión: asequibilidad de vivienda,

TABLA 19

Asequibilidad de vivienda	.50
Oportunidades culturales	.10
Calidad de escuelas y universidades	.20
Nivel de delincuencia	.20

TABLA 20

	Nueva York	Chicago
Asequibilidad de vivienda	.30	.70
Oportunidades culturales	.70	.30
Nivel de delincuencia	.40	.60

oportunidades culturales, calidad de las escuelas y universidades, y nivel de delincuencia. La ponderación para cada objetivo se da en la tabla 19. Para cada objetivo (excepto para la calidad de las escuelas y universidades) las puntuaciones de Nueva York y Chicago se dan en la tabla 20. Suponga que la puntuación para cada ciudad en relación con la calidad de las escuelas y universidades depende de dos cosas: una puntuación respecto a la calidad de la escuela pública y una con respecto a la universidad. La matriz de comparación por pares para la escuela pública y la universidad es como sigue:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Calidad de la escuela pública} & \text{Calidad de la universidad}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Calidad de la escuela pública}\\ \text{Calidad de la universidad}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

Para ver cómo califica cada ciudad en la calidad de la escuela pública y la universidad utilice las siguientes matrices de comparación por pares. Para la calidad de la escuela pública:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Nueva York} & \text{Chicago}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Nueva York}\\ \text{Chicago}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

Para la calidad de la universidad:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cc}\text{Nueva York} & \text{Chicago}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{Nueva York}\\ \text{Chicago}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

Ahora usted debe poder proponer una puntuación para cada ciudad en relación con el objetivo calidad de las escuelas y universidades. Ahora determine dónde debe vivir.

Grupo B

11 En el problema 5, suponga que Rollo no puede contratar a la consultoría y su función de utilidad para el estado de efectivo final es $u(x) = \ln x$. ¿Cuánto dinero debe invertir en acciones y bonos?

12 En la actualidad, arrojar basura al suelo se castiga con una multa de 50 dólares, y hay 10% de probabilidades de que una persona que arroja basura al suelo sea llevada a la justicia. Para reducir la cantidad de basura arrojada al suelo, Gotham City está considerando dos alternativas:

Alternativa 1 Aumentar la multa por tirar basura al suelo 20% (a 60 dólares).

Alternativa 2 Contratar más policías y aumentar 20% la probabilidad de que un individuo que arroje basura al suelo sea llevado ante la justicia (a una probabilidad de 12% de que la persona sea atrapada).

Suponiendo que los residentes de Gotham City son adversos al riesgo, ¿cuáles alternativas darán como resultado una reducción mayor de basura arrojada al suelo?

Grupo C

13† En la sección 13.2, se analizó el concepto de premio de riesgo de una lotería y una persona adversa al riesgo que toma decisiones. En muchas situaciones, nos gustaría medir el grado de aversión al riesgo asociado con una función de utilidad, y cómo la aversión al riesgo de quien toma decisiones depende de su riqueza. En este problema, se desarrolla la **medición de Pratt de aversión absoluta al riesgo.** Considere a Ivana, quien tiene una riqueza inicial W y una función de utilidad $u(w)$ para el estado de riqueza final w. Ella coloca dinero en una pequeña inversión. La inversión incrementará su riqueza por una cantidad aleatoria X, con $E(\mathrm{X}) = 0$. Se quiere investigar cómo el premio de riesgo de X depende de W. Sea $PR(W, \mathrm{X})$ el premio de riesgo asociado con la inversión X si la riqueza de quien toma la decisión es W.

a Explique por qué $PR(W, \mathrm{X})$ satisface la siguiente ecuación:

$$E(\text{Utilidad para el nivel de riqueza de } W + \mathrm{X}) = \text{utilidad del nivel de riqueza } [W - PR(W, \mathrm{X})]$$

b Lleve a cabo un desarrollo en serie de Taylor de segundo orden en E(utilidad para el nivel de riqueza de W + X) respecto a W.

c Efectúe un desarrollo en serie de Taylor de primer orden en el nivel de riqueza $[W - PR(W, \mathrm{X})]$ respecto a W.

d Igualando las respuestas de (b) y (c) (deseche los términos del residuo), demuestre que

$$PR(W, \mathrm{X}) = \frac{-\mathrm{var}(\mathrm{X})u''(W)}{2u'(W)}$$

e La medida de Pratt de aversión absoluta al riesgo en el nivel de riqueza W, conocido como $ARA(W)$, se define como el doble de la cantidad de premio de riesgo por unidad de varianza cuando quien toma decisiones se enfrenta con una lotería pequeña que tiene un valor esperado cero. Utilice su respuesta del inciso (d) para explicar por qué

$$ARA(W) = \frac{-u''(W)}{u'(W)}$$

f Si $ARA(W)$ es una función creciente de W, entonces se dice que $u(w)$ muestra aversión creciente al riesgo, y si $ARA(W)$ es una función decreciente de W, entonces $u(x)$ muestra aversión decreciente al riesgo. ¿La aversión creciente o decreciente al riesgo es más consistente con el comportamiento de la mayoría de las personas?

Determine si las siguientes funciones de utilidad muestran aversión creciente o decreciente al riesgo:

g $u(w) = \ln w$

h $u(w) = w^{1/2}$

i $u(w) = aw - bw^2$, donde $w < \frac{a}{2b}$. Explique cómo la respuesta indica que una probabilidad de función de utilidad cuadrática no es una representación precisa de las preferencias de la mayoría de las personas.

†Basado en Pratt (1964).

BIBLIOGRAFÍA

En los siguientes libros se analiza la toma de decisiones bajo incertidumbre a un nivel intermedio:

Bunn, D. *Applied Decision Analysis.* Nueva York: McGraw-Hill, 1984.

Vatter, P., *et al. Quantitative Methods in Management: Text and Cases*. Homewood, Ill.: Irwin, 1978.

Winkler, R. *Introduction to Bayesian Inference and Decision*. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston, 1972.

Para un análisis de toma de decisiones bajo incertidumbre a un nivel más avanzado, los lectores deben consultar los cinco libros siguientes:

French, S. *Decision Theory*. Nueva York: Wiley, 1986.

Keeney, R. y H. Raiffa. *Decision Making with Multiple Objectives*. Nueva York: Wiley, 1976.

Raiffa, H. *Decision Analysis*. Reading, Mass.: Addison- Wesley, 1968.

Watson, S. y D. Buede. *Decision Synthesis*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge Press, 1987.

Winterfeldt, D. y W. Edwards. *Decision Analysis and Behavioral Research*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge Press. 1986.

Allais. M. "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axioms de l'école Americaine". *Econometrica* 21(1953):503-546.

Clarke. J. "Applications of Decision Analysis to Clinical Medicine". *Interfaces* 17(no. 2. 1981):27-34.

Ellsberg. D. "Risk. Ambiguity and the Savage Axioms", *Quarterly Journal of Economics* 75(1961):643-669.

Feinstein, C. "Deciding Whether to Test Student Athletes for Drug Use". *Interfaces* 20(no. 3. 1990):80-87.

Howard, R. "Heathens, Heretics, and Cults: The Religious Spectrum of Decision Aiding". *Interfaces* 22(no. 6. 1992): 15-27.

Porter. R. "Extra-Point Strategy in Football", *American Statistician* 21(1967):14-15.

Pratt. J. "Risk Aversion in the Small and the Large", *Econometrica* 32(1964):122-136.

Tversky, A. y D. Kahneman. "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice", *Science* 211(1981): 453-458.

Los métodos alternativos para la toma de decisiones multiatributos bajo certidumbre se analizan en:

Steuer, R. *Multiple Criteria Optimization*. Nueva York: Wiley, 1985.

Zeleny, M. *Multiple Criteria Decision Making*. Nueva York: McGraw-Hill, 1982.

Zionts, S. y J. Wallenius. "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", *Management Science* 22(1976): 652-663.

Se recomienda lo siguiente para análisis elementales de la teoría de la utilidad multiatributos:

Bunn, D. *Applied Decision Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill, 1984.

Keeney, R. "An Illustrated Procedure for Accessing Multiattributed Utility Functions", *Sloan Management Review* 14(1972):37-50.

Este clásico proporciona un análisis completo de la teoría de utilidad multiatributos.

Keeney, R. y H. Raiffa. *Decision Making with Multiple Objectives*. Nueva York: Wiley. 1976.

En las siguientes referencias se analiza el PJA:

Golden, B., E. Wasil y P. Harkey. *The Analytic Hierarchy Process*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1989.

Lin, W., T. Mock y A. Wright. "The Use of AHP as an Aid in Planning the Nature and Extent of Audit Procedures", *Auditing: A Journal of Practice and Theory* 4(no. 1, 1984): 89-99.

Saaty, T. *The Analytic Hierarchy Process*. Pittsburgh, Pa.: 1988.

Zahedi, F. "The Analytic Hierarchy Process-a Survey of the Method and Its Applications", *Interfaces* 16(no. 4, 1986): 96-108.