Fórmulas DN-0112 Gerencia de Calidad

Estadística Elemental

Intervalos de clase.

$$R = X_{imax} - X_{imín}$$

$$k \approx 1 + (3.3 \log n)$$

$$i = \frac{R}{k}$$

$$R_p = i_r \times k$$

$$d = R_p - R$$

$$m_d = \frac{d}{2}$$

$$L_i = X_{imín} - m_d$$

$$L_S = L_i + i$$

Medidas de Posición para Datos Agrupados:

$$\overline{x} = A + \frac{(\Sigma \text{ fo} \times \text{d}) \times \text{i}}{n}$$

$$s = i\sqrt{\frac{\Sigma fo \times d^2}{n} - \frac{(\Sigma fo \times d)^2}{n^2}}$$

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times i$$

En donde:
Mo= La moda
Li=límite inferior de la clase modal
d1=diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia anterior
d2=diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia posterior
i= intervalo de la clase

$$P_{Me} = \frac{n+1}{2}$$

En donde:
Pme= La posición de la Mediana
n=número de datos

$$Me = L_i + \frac{\frac{n}{2} - F_a}{f_i} \times i$$

En donde:
Me= La mediana
Li=límite inferior de la clase mediana
n=número de datos
Fa=frecuencia acumulada de la clase anterior
fi=frecuencia absoluta donde está la mediana
i= intervalo de la clase

Medidas de Forma para Datos sin Agrupar:

$$\text{Sesgo} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^3}{(n-1)(n-2)S^3}$$

$$\text{Sesgo estandarizado} = \frac{\text{Sesgo}}{\sqrt{\frac{6}{n}}}$$

$$\text{Curtosis} = \frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)S^4} - \frac{3(n-1)}{(n-2)(n-3)}$$

$$\text{Curtosis estandarizado} = \frac{\text{curtosis}}{\sqrt{\frac{24}{n}}}$$

Medidas de Forma para Datos Agrupados:

$$Sesgo = \frac{1}{n} * \frac{\sum(M_i - \bar{x})^3 * Fo}{S^3}$$

Donde:

Mi es el punto medio de cada límite de clase
S es la deviación estándar
Fo es la frecuencia observada
n el tamaño de la muestra
$\bar{x}$ = media de la muestra

$$Curtosis = \frac{\frac{1}{n}\sum(M_i - \ \bar{x})^4 * Fo}{S^4}$$

Distribuciones de Probabilidad

Distribución Normal:

Función de densidad: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-[(\times-\mu)^2/2\sigma^2]}$

Distribución Normal Estándar: $Z = \frac{\times-\mu}{\sigma}$

Intervalos de clase	fo	Xk	d	fod	fod²	Pi	fe

Distribución t-student:

Función de densidad: $f(t) = \frac{Y_o}{(1+(t^2/v))^{(v+1)/2}}$

Estadístico t: $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n-1}$

Distribución Chi-cuadrado:

Función de densidad: $f(x^2) = Y_0(x^2)^{1/2(v-2)}e^{-1/2}x^2$

Distribución Binomial:

Función de densidad: $b(x,n,p) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x \times q^{n-x}$

La media: $\mu = n \times p$

La varianza: $\sigma^2 = n \times p \times q$

Distribución de Poisson:

Función de densidad: $f(x) = p(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

La media: $\lambda = n \times p$

Para prueba de hipótesis: $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}(n_i \times x_i)}{n}$

Pruebas de Hipótesis:

De una media:

Distribución normal si σ es conocido: $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Distribución t-student si σ es desconocida: $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}$

De proporciones:
Se usa la aproximación binomial a la distribución normal

De una proporción: $Z = \frac{\bar{x}-np}{\sqrt{npq}}$

De dos proporciones: $Z = \frac{\frac{x1}{n1}-\frac{x2}{n2}}{\sqrt{p\prime q\prime\left[\left(\frac{1}{n1}\right)+\left(\frac{1}{n2}\right)\right]}}$ $\quad p' = \frac{x1+x2}{n1+n2}$ $\quad q' = 1-p$

De varianzas:
Caso de una varianza
Se utiliza la distribución Chi-cuadrado: $x^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$

Caso de dos varianzas
Se utiliza la distribución F-Fisher:
Cuando $\sigma_1^2 es\ igual\ a\ \sigma_2^2\ se\ usa$: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Cuando $\sigma_1^2 no\ es\ igual\ a\ \sigma_2^2\ se\ usa$: $F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$

De dos medias:
Caso de σ conocido y muestras mayores que 30:

Cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$: $z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sigma * \sqrt{\left(\frac{1}{n1}\right) + \left(\frac{1}{n2}\right)}}$

Cuando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$: $z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n1}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n2}\right)}}$

Caso de σ desconocida

Cuando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$: $\tau = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n2}\right)}}$

$$v = \frac{\left[\left(\frac{s_1^2}{n1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n2}\right)\right]^2}{\frac{\left(\frac{S_1{}^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2{}^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y $n_i \geq 30$: $\tau = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n2}\right)}}$

$v = n_1 + n_2 - 2$

Cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y $n_i < 30$: $\tau = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{S_p \sqrt{\left(\frac{1}{n1}\right) + \left(\frac{1}{n2}\right)}}$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$v = n_1 + n_2 - 2$

De tres o más medias (ANOVA):

$$SSTotal = \Sigma(x^2) - \frac{(\Sigma x)^2}{n}$$

$$SST = \Sigma\left(\frac{T_c^2}{n_c}\right) - \frac{(\Sigma x)^2}{n}$$

$$SSE = SSTotal - SST$$

Fuente de Variación	Suma de los Cuadrados	Grados de libertad	Media Cuadrática	Fc
Tratamientos	SST	k-1	CM_T	CM_T / CM_E
Error	SSE	n-k	CM_E	
Total	SC total	n-1		

$$CM_T = \frac{SST}{k-1} \;\; y \;\; CM_E = \frac{SSE}{n-k}$$

Método de Tukey: $T_\alpha = q_\alpha(k, n-k)\sqrt{CM_E/n_c}$

Bondad de Ajuste

$$Grados\ de\ libertad = k - 1 - m$$

Estadístico de Chi-cuadrado para la prueba de bondad de ajuste:

$$X^2 = \Sigma \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

Fo	Fe	Fo-Fe	$(\text{Fo-Fe})^2$	$(\text{Fo-Fe})^2/\text{Fe}$

Estadístico de Kolmogorov-Smirnov para la prueba de bondad de ajuste:

$$D_{n,max} = |F_O - F_E|$$

Intervalos	Límites de Clase	Fo	Fo Acumulada	Fo Acumulada Relativa	Fe Acumulada	D $\lvert fo - fe \rvert$

Cartas de Control

Desviación estándar: $\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$

Carta de Promedios:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + (A_2 \times \bar{R})$$
$$LCC = \bar{\bar{x}}$$
$$LIC = \bar{\bar{x}} - (A_2 \times \bar{R})$$

Carta de Intervalos:

$$LSC = D_4 \times \bar{R}$$
$$LCC = \bar{R}$$
$$LIC = D_3 \times \bar{R}$$

Carta de Individuales:

$$LSC = \bar{x} + 3\left({}^{\bar{R}}/_{d_2}\right)$$
$$LCC = \bar{x}$$
$$LIC = \bar{x} - 3\left({}^{\bar{R}}/_{d_2}\right)$$

Carta p:

$$p_i = {}^{d_i}/_{n_i}$$

$$\bar{p} = \frac{Total\ de\ defectuosos}{Total\ de\ inspeccionados}$$

$$\bar{n} = \frac{Total\ de\ inspeccionados}{Total\ de\ subgrupos}$$

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$
$$LCC = \bar{p}$$
$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Carta p con límites variables:

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$
$$LCC = \bar{p}$$
$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

Carta np:

$$LSC = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$
$$LCC = n\bar{p}$$
$$LIC = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$$

Carta c:

$$\bar{c} = \frac{Total\ de\ defectos}{Total\ de\ subgrupos}$$

$$\sigma_{ci} = \sqrt{\bar{c}}$$

$$LSC = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$
$$LCC = \bar{c}$$
$$LIC = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

Carta u:

$$u_i = \frac{c_i}{n_i}$$

$$\bar{u} = \frac{Total\ de\ defectos}{Total\ de\ artículos\ inspeccionados}$$

$$\sigma_{ui} = \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$LSC = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$LCC = \bar{u}$$

$$LIC = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

Carta de Promedios y Desviación Estándar

$$LCS = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

$$\text{Línea central} = \bar{\bar{X}}$$

$$LCI = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}}$$

$$LCS = \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

$$\text{Línea central} = \bar{S}$$

$$LCI = \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Cartas de Pre-Control

$$\textit{Tamaño de la zona} = \frac{USL - LSL}{4}$$

$$UPCL = USL - \textit{Tamaño de la zona}$$

$$LPCL = LSL + \textit{Tamaño de la zona}$$

Carta EWMA

$$LCS = Z_0 + 3\hat{\sigma}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]}$$

$$LCI = Z_0 - 3\hat{\sigma}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}\right)\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]}$$

Límites de la carta en el subgrupo t

$$LCS = Z_0 + 3\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}$$

$$LCI = Z_0 - 3\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}$$

Límites estables de la carta

Desgaste de herramienta:

$$Posición\ inicial\ de\ la\ media = LI_{Esp} + 3\sigma'$$
$$Posición\ final\ de\ la\ media = LS_{Esp} - 3\sigma''$$

$En\ donde\ \sigma'\ cuando\ la\ herramienta\ está\ nueva\ y\ \sigma''\ cuando\ está\ gastada$

Caso de reproceso y desecho:

El costo esperado por pieza sería:

$$Costo = \frac{(Cm + Co + Cd)p_d + (Cm + Co)p_b + (Cm + Co + Cr)p_r}{p_b + p_r}$$

Análisis de Capacidad

$$Cp = \frac{LS_{Esp} - LI_{Esp}}{6\sigma}$$

$$Cpk = Min\left(\frac{\bar{\bar{x}} - LI_{Esp}}{3\sigma}\right) o \left(\frac{LS_{Esp} - \bar{\bar{x}}}{3\sigma}\right)$$

$$Cpm = \frac{LS_{Esp} - LI_{Esp}}{6\sqrt{t}}$$

$$t = \sigma^2 + \left(\bar{\bar{x}} - LC_{Esp}\right)^2$$

Donde *t* es la variabilidad total del proceso

Índice de inestabilidad: $St = \left(\frac{Número\ de\ casusas\ asignables}{Número\ total\ de\ puntos\ graficados}\right) \times 100$

Índices para cumplir con la especificación inferior o superior

$$C_{pi} = \frac{\mu - EI}{3\sigma} \quad \text{y} \quad C_{ps} = \frac{ES - \mu}{3\sigma}$$

$$K = \frac{\mu - N}{\frac{1}{2}(ES - EI)} \times 100$$

Índice K para medir si el proceso está centrado

Índices de capacidad en el Largo Plazo

$$P_p = \frac{ES - EI}{6\sigma_L}$$

$$P_{pk} = \text{mínimo}\left[\frac{\mu - EI}{3\sigma_L}, \frac{ES - \mu}{3\sigma_L}\right]$$

Estimación de los índices mediante una muestra:

$$\hat{C}_p = \frac{ES - EI}{6S}$$

$$\hat{C}_{pi} = \frac{\overline{X} - EI}{3S}$$

$$\hat{C}_{ps} = \frac{ES - \overline{X}}{3S}$$

$$\hat{C}_{pk} = \text{mínimo}\left(\hat{C}_{pi}, \hat{C}_{ps}\right)$$

$$\hat{C}_{pm} = \frac{ES - EI}{6\sqrt{S^2 + (\overline{X} - N)^2}}$$

$$\hat{C}_p \pm Z_{\alpha/2} \frac{\hat{C}_p}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$$\hat{C}_{pk} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{C}_{pk}^2}{2(n-1)} + \frac{1}{9n}}$$

$$\hat{C}_{pm} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\hat{C}_{pm}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + \frac{(\bar{X}-N)^2}{s^2}}{\left[1 + \frac{(\bar{X}-N)^2}{s^2}\right]^2}}$$

Métricas Seis Sigma

Índice Z

$$Z_{ES} = \frac{ES - \bar{\bar{x}}}{s}$$

$$Z_{EI} = \frac{\bar{\bar{x}} - EI}{s}$$

La capacidad es igual al valor más pequeño entre Z_{ES} y Z_{EI}

Desplazamiento del proceso en el tiempo

$$Z_m = Z_c - Z_L$$

$$3C_{pk} = Z_c \text{ y } 3P_{pk} = Z_L$$

$$DPU = \frac{D}{N}$$

$$DPO = \frac{D}{N \times O}$$

$$DPMO = 1{,}000{,}000 \times \left(\frac{D}{N \times O}\right)$$

$$ppm = \frac{Defectuosos}{Total\ de\ Partes} \times 1{,}000{,}000$$

$$nivel\ \sigma = 0.8406 + \sqrt{29.37 - 2.221 \ln(ppm)}$$

Muestreo de Aceptación

Plan de muestreo con base en el riesgo del productor:

$$n_\alpha = \frac{np_\alpha}{AQL}$$

Plan de muestreo con base en el riesgo del cliente:

$$n_\beta = \frac{np_\beta}{PNCT}$$

Plan de muestreo con base en ambos riegos:

$$n_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha + n_\beta}{2}$$

AQL = Nivel de calidad aceptable, porcentaje máximo de unidades que no cumplen con la calidad especificada.
PNCT = Producto no conforme tolerado, es el nivel de calidad que se considera no satisfactorio y los lotes con este tipo de calidad deben ser rechazados casi siempre.

AOQ = Calidad promedio de salida, es la calidad promedio que se alcanza después de aplicar el proceso de inspección.

$$AOQ = p \times PA$$

AOQL = Límite de la calidad promedio de salida, es el valor máximo de la curva AOQ y representa la peor calidad promedio que se puede obtener del programa de inspección.

Método de Cameron
$Si\ p_1 = AQL/100\ y\ p_2 = PNCT/100$

$$Razón\ crítica\ R_c = \frac{p_2}{p_1}$$

$$n = \frac{np_1}{p_1}$$

Tabla Militar STD 414

$$Z_{ES} = \frac{ES - \bar{x}}{s}$$

$$Z_{EI} = \frac{\bar{x} - EI}{s}$$

En donde ES significa especificación superior y EI especificación inferior.

Análisis económico de un plan de muestreo

$N = Tamaño\ del\ lote$
$Ci = Costo\ de\ inspeccionar$
$Cd = Costo\ de\ las\ defectuosos$

$$\frac{\$_i}{und} = Costo\ de\ inspeccionar\ una\ unidad$$

$$\frac{\$_d}{und} = Costo\ si\ entra\ una\ unidad\ defectuosa\ al\ sistema$$

$$Ci = \frac{\$_i}{und} \times n$$

$$Cd = (N \times AOQL) \times \frac{\$_d}{und}$$

$$CT = Ci + Cd$$